

Robust Procesregulering

Steen Tøffner-Clausen, Palle Andersen
og Jakob Stoustrup

U96-4153 • 6. oktober 1998

3. Udgave

Afdeling for Proceskontrol, Institut for Elektroniske Systemer
Aalborg Universitet, Fredrik Bajers Vej 7, DK-9220 Aalborg Ø, Danmark

Forord

Denne note er skrevet til et grundlæggende kursus i robust optimal regulering på Systemkonstruktionliniens 9. semester, Institut for Elektroniske Systemer, Aalborg Universitet. Noten var oprindeligt tiltænkt et kursus på 6 minimoduler af 4 timer. Da kurserne p.t. imidlertid er skåret ned til kun 5 minimoduler, vil noten indeholde stof, der ikke kan gennemgås i kurset. Noten er tilpasset det niveau, der forventes af 9. semesters studerende på Systemkonstruktionlinien. Det forventes, at de studerende har kendskab til klassisk feedback regulering.

Formålet med noten er at give en indføring i moderne robust og optimal regulering, specielt i \mathcal{H}_∞ og μ teori. I Kapitel 1 gives en kort introduktion til begrebet robust regulering, hvorefter vi i Kapitel 2 behandler nominel og robust stabilitet for enkeltvariable (SISO) systemer. I Kapitel 3 analyseres nominel og robust ydeevne for SISO systemer og begreberne \mathcal{H}_∞ og \mathcal{H}_2 optimal regulering introduceres. Kapitel 4 giver en introduktion til analyse af flervariable systemer og i Kapitel 5 ses på stabilitet og ydeevne af multivariable systemer. I Kapitel 6 præsenteres en løsning på \mathcal{H}_∞ reguleringsproblemet. Endelig gives der i Kapitel 7 en introduktion til den strukturerede singulærværdi μ og regulator design med μ behandles.

Nøgleord

Robust optimal regulering, robust stabilitet, robust ydeevne, \mathcal{H}_∞ optimal regulering, μ -analyse, μ -syntese.

Forfatternes tilhørsforhold

Forfatterne er ansat hvy. ved Grundfos A/S, og ved Afdeling for Proceskontrol, Institut for Elektroniske Systemer, Aalborg Universitet, DK-9220 Aalborg Ø, Denmark. Tag et kig på afdelingens home-page: <http://www.control.auc.dk>. De sidste to forfattere har flg. e-mail adresser er: {pa, js}@control.auc.dk

Indhold

1	Robust feedbackregulering	1
1.1	Feedback og robusthed	1
1.2	Klassiske metoder til design af regulatorer	3
1.3	Modelusikkerhed.	5
1.4	Feedback-systemer i tilfælde af modelusikkerhed.	7
1.5	Robust procesregulering.	7
2	Nominel og Robust Stabilitet	9
2.1	Procesmodel	9
2.2	Modelusikkerhed	9
2.3	Nominel stabilitet	11
2.4	Robust stabilitet.	11
3	Nominel og robust ydeevne	13
3.1	Signalnormer.	13
3.2	Normer for systemer og overføringsfunktioner.	15
3.3	Specifikation af input.	15
3.4	Krav til ydeevne.	18
3.5	\mathcal{H}_2 optimal regulering (LQ).	19
3.6	\mathcal{H}_∞ - optimal regulator.	19
3.7	Robust ydeevne.	21
3.8	\mathcal{H}_2 - robust ydeevne	21
3.9	\mathcal{H}_∞ - robust ydeevne.	21
3.10	Sløjfetilpasning (loop shaping)	23
4	Introduktion til flervariable systemer	26
4.1	Poler og nulpunkter af flervariable systemer	26
4.1.1	Smith-McMillan form af en overføringsmatrix	27
4.1.2	Tilstandsbeskrivelser	30
4.2	Nominel stabilitet af flervariable systemer	33
4.2.1	Intern stabilitet	33
4.2.2	Den generaliserede Nyquist sætning	34
4.3	Frekvensrespons af flervariable systemer	37
4.3.1	Vektornormer	37
4.3.2	Inducerede normer	38
4.3.3	Singulærværdier	38

5	Robusthedsanalyse af flervariable systemer	42
5.1	Nominel ydeevne	43
5.1.1	Funktionsnormer for flervariable systemer	44
5.1.2	2×2 blok problem	48
5.2	Robust stabilitet	49
5.2.1	Sløjfeforstærkningsætningen	50
5.3	Robust ydeevne	54
5.3.1	Specifikationer med blandede sensitivitetfunktioner	57
5.3.2	Betydning af nulpunkter og poler i højre halvplan	59
6	Robust dimensionering af flervariable systemer	61
6.1	Sløjfe-tilpasning	61
6.2	Modellering af input og modelusikkerhed	62
6.3	\mathcal{H}_∞ Regulering	64
6.3.1	Bemærkninger til \mathcal{H}_∞ løsningen	66
6.3.2	MATLAB Toolboxene	70
7	Robust regulator design med μ	75
7.1	μ analyse	75
7.1.1	Robust stabilitet	75
7.1.2	Robust ydeevne	81
7.1.3	Beregning af μ	83
7.2	μ syntese	86
7.2.1	Kompleks μ syntese – D - K iteration	87

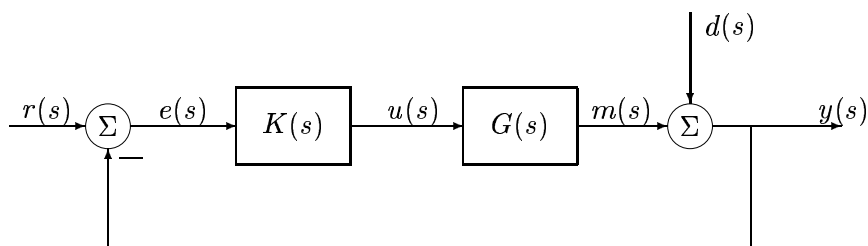
Kapitel 1

Robust feedbackregulering

Kapitel 1 indeholder en generel præsentation af traditionel feedback regulering, idet der fokuseres på regulerede systemers robusthed overfor modelusikkerhed. Behovet for at udvikle designmetoder, der explicit inddrager modelusikkerhed dokumenteres.

1.1 Feedback og robusthed

Regulering af en proces ved tilbagekobling (feedback) af et målt output er et velkendt princip, hvis primære formål er, at holde processens output tæt på en given reference.



Figur 1.1: *Standard feedback konfiguration.*

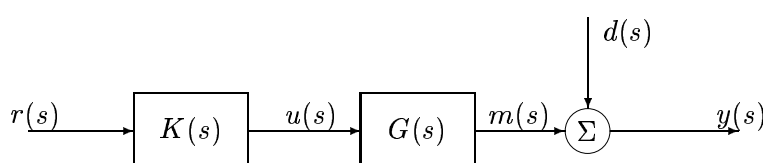
På Figur 1.1 er vist en standard feedback konfiguration, bestående af en proces $G(s)$ og en regulator $K(s)$. Systemer med feedback kan man ofte give en række vigtige egenskaber:

- Man kan stabilisere systemer, der er født ustabile.
- Virkningen af eksterne forstyrrelser d kan undertrykkes.
- Det er muligt at give systemet ønskede dynamiske egenskaber.
- Endelig viser det sig, at disse egenskaber ofte kan opnås selv med et ufuldstændigt kendskab til processens egenskaber.

Feedback-regulerede systemer har altså gode egenskaber som med lidt omhu kan gøres robuste.

Fordelene ved feedback kan understreges ved at betragte de usikre elementer i en proces. Der er to årsager til, at output fra en proces ikke på forhånd er fuldstændig kendt. For det første er processens egenskaber ikke fuldstændig kendte. Dvs. at en model kun kan betragtes som en tilnærmet beskrivelse af den fysiske proces. Dernæst kan ukendte forstyrrelser påvirke processen. Output y er altså ikke alene en funktion af det input u , som regulatoren styrer, men også af forstyrrelsen d , som ofte ikke kan måles.

De grundlæggende egenskaber ved feedback fremgår af en sammenligning med en feedforward konfiguration (åben sløjfe regulering) jævnfør Figur 1.2. Ved åben sløjfe (ÅS) regulering afhænger resultatet helt af, hvor nøjagtigt processen er modelleret, da regulatoren bestemmer input udelukkende på grundlag af modellen og referencen. Afvigelser som skyldes forstyrrelsen d og modelafvigelser slår fuldt igennem som forskel mellem det faktiske og det forventede output.



Figur 1.2: *Feedforward konfiguration.*

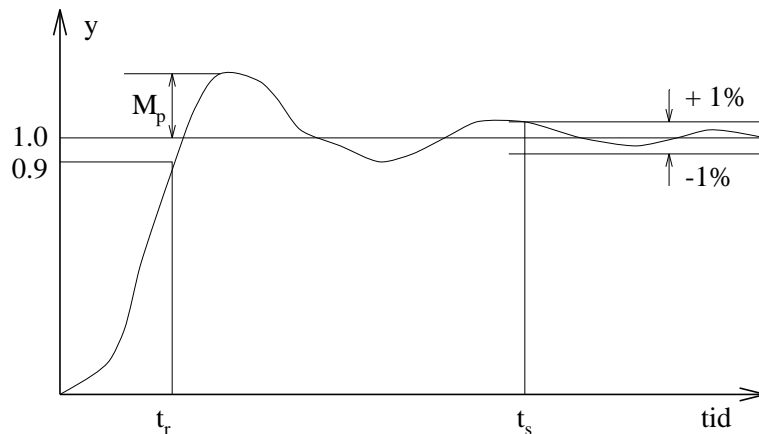
I modsætning hertil sammenligner feedback-regulatoren den aktuelle værdi af outputtet y med referencen r og fastlægger input u på grundlag af fejlen e . Udover den a priori viden, der er givet om systemet i form af en matematisk model af den fysiske proces, benytter feedback-regulatoren den viden om processens aktuelle opførsel og de øjeblikkelige forstyrrelser, som implicit opnås ved at måle værdien y . Herved er det muligt, at reducere såvel virkningen af forstyrrelsen d , som virkningen af, at den matematiske model ikke er perfekt.

Design af feedback-regulatorer tager udgangspunkt i krav til det regulerede systems statiske og dynamiske opførsel. Disse krav kan f.eks. omfatte følgende, [Lun89]:

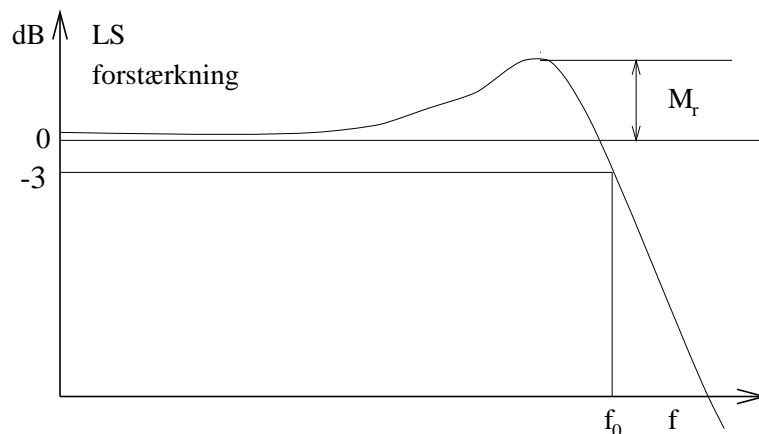
1. Stabilitet: Det regulerede systems arbejds punkt skal være stabilt.
2. Asymptotisk regulering: For en given klasse af referenceinput $r(t)$ og forstyrrelser $d(t)$ skal fejlen $e(t)$ gå mod nul for tiden t gående mod uendelig.
3. Dynamiske krav: Det regulerede system skal opfylde et sæt specifikationer såsom begrænsninger på stepresponse og krav til en vis grad af afkobling mellem forskellige signaler osv.
4. Krav til robusthed: De egenskaber, der er specificeret for det regulerede system i pkt. 1-3, skal bevares under en given klasse af variationer i proces-dynamikken.

I proces-regulering formuleres kravene i pkt. 3 ofte som krav til output $y(t)$ og til styresignalet $u(t)$ ved step- eller rampeformede variationer i reference eller forstyrrelse. Kravene kan f.eks. være begrænsninger på oversving M_p , stigetid t_r (engelsk risetime) og indsvingningstid t_s (engelsk settlingtime) på stepresponse, se Figur 1.3.

Kravene kan også formuleres i frekvensdomænet som krav til ÅS eller LS overføringsfunktionen, f.eks. kan der stilles krav til LS resonnanstop M_r og båndbredde f_0 , se Figur 1.4.



Figur 1.3: Designkrav i tidsdomæne: Krav til M_p , t_r og t_s for output y ved spring i referencen r .



Figur 1.4: Designkrav i frekvensdomæne: Krav til M_r og f_0 .

1.2 Klassiske metoder til design af regulatorer

Hovedparten af de metoder, der anvendes til dimensionering af regulatorer forudsætter en eksakt model af processen og fokuserer på kravene i pkt. 1 - 3.

Stabilitetsanalyse i frekvensplanen blev udviklet af Nyquist og Bode. Design af regulatorerne blev gennemført ved metoder baseret på 'trial and error'.

Tuningsregler som Ziegler og Nichols' er baseret på simple modeller, men har med succes været anvendt på processer med stor kompleksitet.

Rodkurveanalyse, som blev udviklet af W.R. Evans, tager sigte på at opnå givne dynamiske egenskaber ved at bestemme en regulator, der giver tilfredsstillende placering af lukket sløjfe polerne.

Der er endvidere udviklet metoder til direkte beregning af en regulator, som giver en ønsket

placering af polerne.

Metoder, der tager sigte på at opfylde ydeevnespecifikationer formuleret som krav til den integrerede kvadratfejl, er blevet introduceret af Newton, Gould og Kaiser og videreudviklet af bl.a. Kalman.

Selv om et af formålene med feedback-regulering er at formindske virkningerne af modelafvigelser, tager alle disse metoder udgangspunkt i et eksakt modelkendskab og tager kun indirekte hensyn til, at der aldrig er en perfekt model til rådighed.

Da mange af metoderne er blevet anvendt med succes igennem mange år på grund af feedback-regulatorens indbyggede robusthed, kan man sætte spørgsmål ved det rimelige i, at inkludere robusthed overfor modelvariationer i regulatordesign. Der findes imidlertid mange eksempler på, at indførelse af feedback ikke automatisk medfører den krævede robusthed overfor de modelvariationer, der kan forekomme. Følgende eksempel er lånt fra [Lun89].

Eksempel 1.1 (Robust Stabilitet)

En proces beskrives med modellen

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s}$$

som ved forsøg har vist sig tilnærmelsesvis at give samme stepresponse som processen. Processen kan for eksempel reguleres med en proportionalregulator med forstærkning K . Forstærkningen K burde uden problemer kunne vælges vilkårlig stor.

Det viser sig imidlertid, at processen i virkeligheden beskrives mere nøjagtigt med modellen

$$\hat{G}(s) = \frac{1 - \tau_0 s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

Det ses nu, at reguleringssystemet bliver ustabil, hvis K vælges for stor. For at sikre stabilitet må K vælges under grænsen

$$K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_0}$$

Er f.eks $\tau_0 = \tau_2 = 0.1 \cdot \tau_1$ skal man for at sikre stabilitet vælge $K < 11$.

Eksemplet viser, at selv om der ved simple stepresponse forsøg kan findes en model, der tilnærmet beskriver processen, så kan en sådan model ikke ukritisk anvendes til dimensionering af en regulator uden vurdering af modellens gyldighedsområde.

Eksemplet illustrerer endvidere hovedproblemet i design af regulatorer til systemer med modelusikkerhed: ønsket om god ydeevne medfører ønske om høj forstærkning. Dette er i strid med ønsket om robusthed, idet modelafvigelser let kan føre til ustabilitet i systemer med høj forstærkning.

Når det alligevel har været muligt at designe praktisk anvendelige regulatorer, skyldes det at erfarne ingeniører designer regulatorerne med en vis konservatisme ved at undlade at gå helt

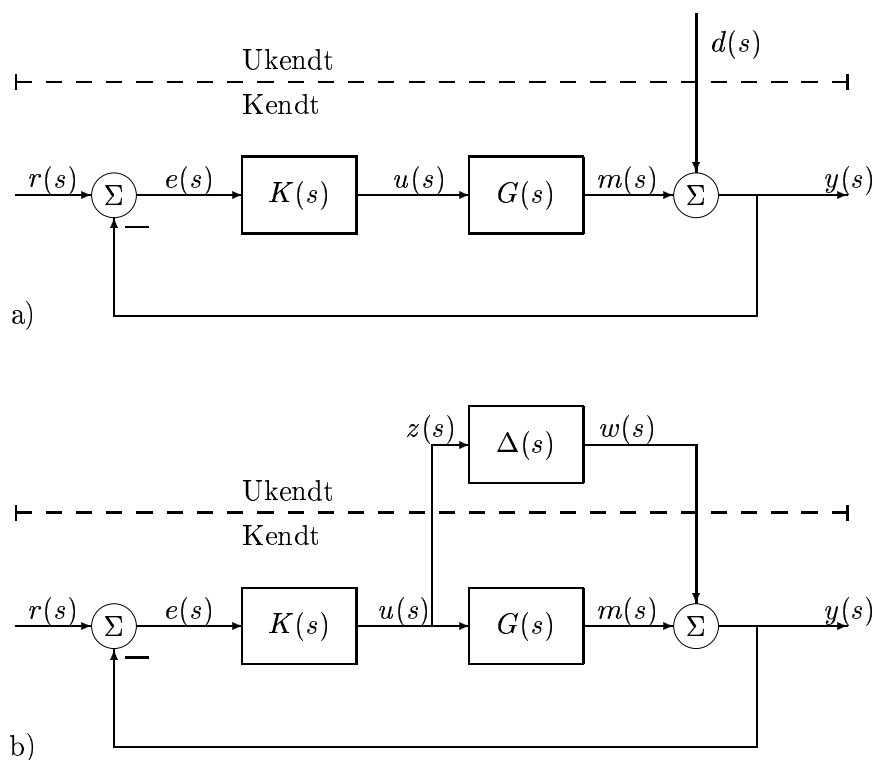
til den teoretiske grænse med forstærkning. I regulatorer, der baseres på minimering af en ydeevnefunktion, kan der opnås en vis robusthed ved at lade ændringer i styresignalet indgå i ydeevnefunktionen.

Udvikling af metoder, der direkte inddrager modelusikkerhed i regulatordesign, har først taget fart inden for de seneste 10-15 år.

1.3 Modelusikkerhed.

Normalt indledes regulatordesign med en matematisk modellering af den proces, der skal reguleres. Design af regulatorer på grundlag af den fremkomne model må foretages under hensyn til modellens gyldighedsområde. Hvis man vil have sikkerhed for, at en regulator fungerer under alle forhold, er det nødvendigt at supplere procesmodellen med en model, der udtrykker de mulige afvigelser fra den nominelle model.

Der er to årsager til, at processens output ikke kan forudsiges helt nøjagtigt af den model, der opstilles af processen. Processen kan påvirkes af forstyrrelser og processens dynamik kan være forskellig fra modellens, se Figur 1.5



Figur 1.5: Forstyrrelser kontra modelusikkerhed i lukketsløjfe systemet. a) LS-system udsat for forstyrrelser. b) LS-system med modelusikkerhed.

Forstyrrelser er eksterne signaler, som er uafhængige af procesinput. Indflydelsen fra forstyrrelser kan samles ved processens output som et eksternt input d , der adderes til modeloutput, som vist på Figur 1.5a. Afvigelser mellem processens dynamik og modellen giver anledning til en forskel, der i modsætning til forstyrrelser ikke skyldes ukendte forstyrrelser, men derimod

er afhængig af input u . Modelusikkerheder kan derfor repræsenteres af en fejlmodel med input z og output w , se Figur 1.5b.

Undertrykkelse af forstyrrelser indgår i design af regulatorer som en del af designkravene i pkt. 1 - 3. Der fokuseres derfor i denne sammenhæng på modelusikkerheder. Der er tre hovedårsager til modelusikkerhed:

1. Ufuldstændig viden om processen: Denne type usikkerhed kan skyldes, at modellen er opstillet på grundlag af fysiske love, men at modellens nøjagtige parametre ikke kan fastsættes på grundlag af det kendskab, der foreligger om processen. Hvis modellen bestemmes eksperimentielt afhænger modellens nøjagtighed af, om der er givet input påvirkninger, der er velegnede til at bestemme modellen og af i hvilket omfang processen har været påvirket af forstyrrelser under eksperimentet.
2. Modelsimplificering: Skønt det originale system kendes med god nøjagtighed, kan modellen være reduceret for at simplificere designopgaven.
3. Utilstrækkelig modelstruktur: Da man som regel ønsker at designe regulatorer ud fra en lineær model må ulineariteter i modellen udelades. Ulineariteter kan skyldes begrænsninger i aktuatorer eller sensorer. Andre typer ulineariteter skyldes, at selve processen er ulineær. Denne type ulineariteter resulterer ofte i arbejdspunktafhængige parametre i den lineariserede model.
4. Tidsvarierende parametre: Resulterer ligeledes i variation i modellens parametre.

Under alle omstændigheder er modellen kun en tilnærmet repræsentation af den fysiske proces. Systemer med store modelusikkerheder kaldes *usikre systemer* (engelsk: *uncertain systems*) uden hensyntagen til, om usikkerhederne skyldes mangel på informationer, modelsimplifikationer, ulineariteter eller tidsvarierende parametre.

I litteraturen benyttes forskellige betegnelser for specielle former for modelusikkerhed. *Parameter usikkerhed* er den form for modelusikkerhed, der kan kompenseres for ved korrigerede modellens parametre. *Strukturel usikkerhed* er den form for usikkerhed, der skyldes utilstrækkelig eller ukorrekt modelstruktur, dvs. ved anvendelse af en lineær model for en i realiteten ulineær proces eller ved at udelade dynamiske elementer i processen. Modelusikkerhed klassificeres ligeledes i henhold til om man kun kender størrelsen eller om man har kendskab til karakteren af usikkerheden, idet der skelnes mellem *strukturet* og *ustrukturet* usikkerhed.

Modelusikkerhed kan beskrives ved definition af en mængde af mulige modeller. I denne mængde eller familie af modeller, kan hvert medlem repræsentere den originale proces, men det er ukendt hvilket element, der rent faktisk gør det. Afhængigt af hvordan karakteren af modelusikkerheden er, fremstår mængden af mulige modeller på forskellige måder. Ved en afbildning i Nyquist-planen af mulige modeller fremkommer ved hver frekvens et begrænsende område i planen.

Normbegrænsede afvigelse blev af Doyle foreslået anvendt i forbindelse med regulatordesign. Modelafvigelsens numeriske størrelse i frekvensdomænet begrænses her til en given frekvensafhængig værdi. Dette kan i Nyquist-planen beskrives ved hjælp af cirkelformige begrænsninger.

1.4 Feedback-systemer i tilfælde af modelusikkerhed.

Modelusikkerhed kan ikke generelt behandles som forstyrrelser, på trods af, at dette undertiden gøres, især hvis der er tale om små usikkerheder. Eksterne forstyrrelser kan ikke påvirke stabiliteten i et lineært LS system. Som det fremgår af Eksempel 1.1 kan en modelafvigelse påvirke stabiliteten. I eksemplet må proportionalforstærkningen af hensyn til stabilitet således ikke overstige en øvre grænse afhængig af parametrene i den 'rigtige' model.

I det følgende defineres en række begreber, som har betydning i forbindelse med modkobling af usikre systemer:

- *Følsomhed* er et udtryk for, hvorledes en egenskab ved systemet (f.eks. LS overføringsfunktionen) afhænger af differentielle afvigelser på en parameter eller på parametervektoren. Følsomhedsanalyse omhandler små afvigelser i nærheden af en nominal værdi og refererer ikke til, hvor stor en værdi afvigelsen kan antage.
- *Robusthed* beskriver et systems evne til at udvise tilfredsstillende egenskaber for alle modeller i en given familie. Robusthed refererer altså til et acceptabelt område for de ønskede egenskaber og til givne grænser for modelafvigelser.
- Hverken følsomhed eller robusthed fortæller noget om, hvor sandsynligt det er, at givne modelafvigelser vil forekomme inden for et givet tidsinterval. *Pålidelighed* er et udtryk for et systems evne til at fungere tilfredsstillende inden for en given tidsperiode. I pålidelighedsanalyse anvendes statistiske metoder. Kvantitative mål for pålidelighed er således sandsynligheder for, at systemet fungerer tilfredsstillende til et givet tidspunkt eller inden for et givet tidsrum.
- *Adaptivitet* er et (regulerings-) systems evne til at tilpasse sig en ændring i processen. En tid efter, at processen har ændret sig, vil et adaptivt system have tilpasset sig og vil igen fungere tilfredsstillende. I feedback-regulering spiller følsomhed, robusthed og adaptivitet vigtige roller. Ved design af robuste regulatorer søger man lineære regulatorer, som sikrer tilfredsstillende funktion ved alle forekommende modelvariationer. Som et alternativ hertil søger man ved adaptiv regulering at tilpasse regulatoren løbende til den model, der til enhver tid beskriver processen bedst.

Pålidelighedsanalyse benyttes hovedsageligt i forbindelse med realisation af regulatorer og andet proceskontroludstyr og er således mest anvendt i forbindelse med spørgsmål som: "Hvor stor er sandsynligheden for proceskontroludstyret fungerer tilfredsstillende?"

1.5 Robust procesregulering.

Denne note omhandler analyse af reguleringssystemers robusthedsegenskaber og design af robuste reguleringssystemer, hvilket i de seneste år har været genstand for intens forskning. I denne forbindelse er følgende forskningsresultater centrale:

- Youla et al [YJB76a], [YJB76b] viste i 1976, at det er muligt, at parameterisere alle de regulatorer, der stabiliserer et givet system. Dette forenkler design af en stabiliserende regulator.

- Doyle og Stein [DS79] gjorde i 1979 opmærksom på, at LQ regulatorens gode fase-og amplitudemargin let kan blive ødelagt med en observer, og gav samtidig en metode til at genskabe de gode egenskaber.
- Zames, [Zam81] foreslog i 1981 anvendelse af uendelig normen (H_∞ normen) anvendt i stedet for den traditionelle 2-norm ved bedømmelse af regulatorers ydeevne.
- Doyle og Stein, [DS81] viste i 1981, at modelusikkerhed meget effektivt kan beskrives med normbundne afvigelser. Sammen med H_∞ normen udgør normbundne afvigelser et godt værktøj til beskrivelse af regulatorers robusthed. Doyle [Doy82] foreslog i 1982 at generalisere dette til strukturerede usikkerheder med μ .
- Doyle et al [DGKF89] beskrev i 1989 regulator design ved minimering af en H_∞ -norm baseret på tilstands modeller.

Kapitel 2

Nominel og Robust Stabilitet

For at kunne designe en robust regulator til regulering af en proces er det ikke alene nødvendigt at specificere en nominel model af processen, men også den modelusikkerhed, som reguleringssystemet skal være robust overfor. Kravene til regulatoren er, at output fra processen skal følge variationer i referencen og at forstyrrelser skal undertrykkes. For at kunne designe regulatoren er det derfor også nødvendigt at kende karakteren af referencesignalet og af forstyrrelser. Ydeevnekravene kan herefter udtrykkes som krav til en vis grad af fejlundertrykkelse ved de forekommende input.

Design af en robust regulator tager udgangspunkt i:

- Procesmodel
- Modelusikkerhed
- Karakter af input (for reference og forstyrrelser)
- Krav til ydeevne

At regulatoren er robust vil sige, at ydeevnekravene er opfyldt såvel med den nominelle procesmodel som ved de ydergrænser, der er specificeret ved modelusikkerheden.

I de følgende afsnit formuleres rammer til specifikation af model, modelusikkerhed, inputkarakter og ydeevnekrav for enkeltvariable (SISO) systemer. For flervariable (MIMO) systemer, se Kapitel 5 på side 42.

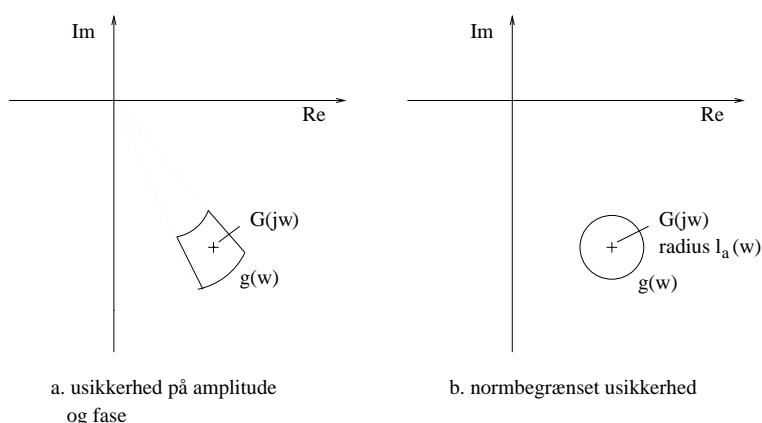
2.1 Procesmodel

De begreber og metoder, der anvendes, er baseret på lineære tidsinvariante modeller.

2.2 Modelusikkerhed

Modelusikkerhed specificeres ofte i frekvensdomænet. Dette kan føre til, at der for hver frekvens ω specificeres et område $g(\omega)$ i Nyquistplanen, som processens 'virkelige' model $G_{\Delta}(j\omega)$

antages at befinde i. Den form området $g(\omega)$ får, er bestemt af hvordan usikkerheden specificeres. Specifikation af en bestemt usikkerhed på størrelse og fase vil således føre til et sektorformet område som vist på Figur 2.1a. Mange af de resultater og metoder, der beskrives i det følgende, er baseret på normbegrænsede modelafvigelser. Det vil for SISO systemer sige, at usikkerheden ved hver frekvens er begrænset af en cirkel med radius $\ell_a(\omega)$ i Nyquist-planen, jævnfør Figur 2.1b.



Figur 2.1: Usikkerhedsområder ved specifikation af a) amplitude og faseusikkerhed. b) Normbegrænset usikkerhed.

Der kan da defineres en familie af modeller:

$$\mathcal{G} = \{G_{\Delta} : |G_{\Delta}(j\omega) - G(j\omega)| \leq \ell_a(\omega)\} \quad (2.1)$$

$$= \{G_{\Delta} : |G_{\Delta}(j\omega) - G(j\omega)| \leq \ell_m(\omega)|G(j\omega)|\} \quad (2.2)$$

hvor $G(j\omega)$ angiver den nominelle model, og $G_{\Delta}(j\omega)$ angiver mulige procesmodeller. $\ell_a(\omega)$ er den maksimale, additive modelusikkerhed og $\ell_m(\omega)$ er den maksimale multiplikative (relative) usikkerhed.

Et vilkårligt medlem af \mathcal{G} kan beskrives som:

$$G_{\Delta}(j\omega) = G(j\omega)(1 + \Delta_m(j\omega)) = G(j\omega) + \Delta_a(j\omega) \quad (2.3)$$

hvor den aktuelle multiplikative eller additive modelafvigelse (Δ_m eller Δ_a) er begrænset af:

$$|\Delta_m(j\omega)| \leq \ell_m(\omega) \quad (2.4)$$

$$|\Delta_a(j\omega)| \leq \ell_a(\omega) \quad (2.5)$$

Den multiplikative modelusikkerhed er ofte stigende med stigende frekvens da de modeller, der anvendes i forbindelse med regulator design, udledes med henblik på beskrivelse af den dominerende dynamik.

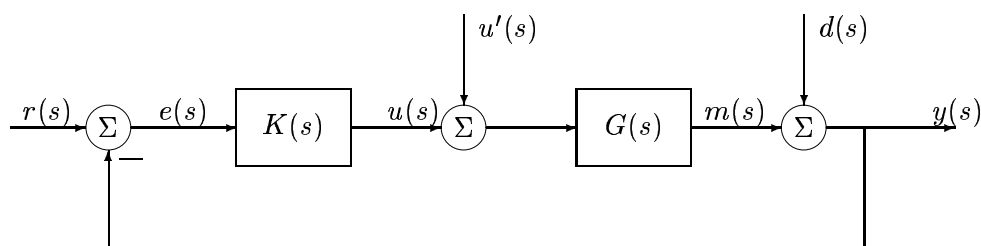
Den normbegrænsede modelafvigelse tillader, hvis $\ell_m(\omega) > 1$, at modellerne har forskelligt antal nulpunkter i højre halvplan. Et nulpunkt på $j\omega$ -aksen muliggøres f.eks. af $\Delta_m(j\omega) = -1$, jævnfør Ligning 2.3.

Derimod er beskrivelsen ikke velegnet til at beskrive procesusikkerhed, hvis antallet af poler i højre halvplan kan variere, idet dette betyder, at $\ell_m(\omega)$ skal antage værdien ∞ .

Bemærk, at l_a og l_m er frekvensafhængige skalarer og således funktioner af ω (og ikke $j\omega$). Vi vil imidlertid ofte repræsentere $l_a(\omega)$ og $l_m(\omega)$ ved hjælp af normale overføringsfunktioner, hvor vi udelukkende vil interessere os for amplituden.

2.3 Nominel stabilitet

Et reguleringsystem er internt stabilt, hvis påtrykkelse af et begrænset signal et vilkårligt sted i systemet ikke genererer et ubegrænset signal noget sted i systemet. På Figur 2.2 er vist en reguleret proces, hvor der er 3 input (r, u', d) og 3 output (e, u, y) til det samlede system.



Figur 2.2: *Reguleret system med input til analyse af intern stabilitet.*

Ved analysen af intern stabilitet, er det ikke nødvendigt at teste en 3×3 matrix, da flere af signalerne stabilitetsmæssigt indeholder den samme information. F. eks. har signalerne d og r samme indflydelse på output u hvad angår stabilitet. Idet r og u' vælges som input og y og u vælges som output, kan nedenstående overføringsmatrix opstilles:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GK(s)}{1+GK(s)} & \frac{G(s)}{1+GK(s)} \\ \frac{K(s)}{1+GK(s)} & \frac{-GK(s)}{1+GK(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ u'(s) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Af Ligning (2.6) fremgår, at det regulerede system kun er internt stabilt, hvis ingen af de 4 elementer i matricen har poler i højre halvplan. Ligeledes fremgår, at hvis både $G(s)$ og $K(s)$ er stabile, er det tilstrækkeligt at analysere den karakteristiske ligning $1 + GK(s) = 0$.

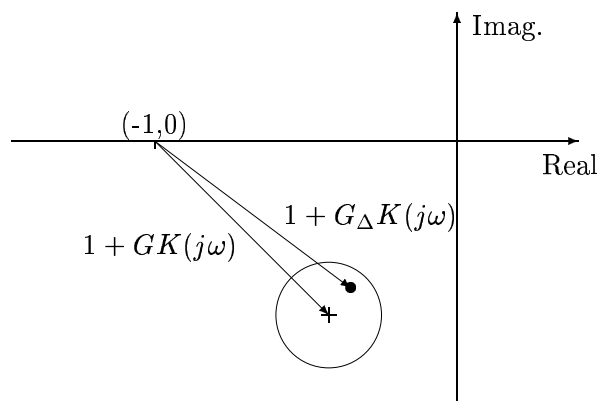
Det bemærkes, at hvis $G(s)$ har en ustabil pol, er anvendelse af en regulator, der eksakt plomberer den ustabile pol, ikke tilstrækkeligt til at garantere intern stabilitet. Dette indses af Ligning (2.6), idet et begrænset input u' medfører et ubegrænset output på y .

2.4 Robust stabilitet.

Hvad er nu betingelsen for, at det regulerede system er robust stabilt, altså at systemet er stabilt for alle procesmodeller indeholdt i \mathcal{G} ? Vi antager, at alle modeller i \mathcal{G} har samme antal poler, n , i højre halvplan.

Det regulerede system er da kun stabilt, hvis Nyquistkurven for $GK(j\omega)$ omkranser Nyquistpunktet $(-1,0)$ n gange mod uret.

Hvis $K(s)$ stabiliserer det nominelle system $G(s)$ bliver betingelsen for, at $K(s)$ stabiliserer alle modeller i \mathcal{G} , at antallet af omkransninger af $(-1,0)$ ikke ændres. Dette er ensbetydende



Figur 2.3: Afstand til Nyquistpunktet $(-1,0)$ for det nominelle system $G(s)$ og for en vilkårligt model i \mathcal{G} .

med, at det område i Nyquistplanen, der dækkes af mulige $G_\Delta K(j\omega)$ ikke omfatter $(-1,0)$, eller at afstanden fra $G(j\omega)$ til $(-1,0)$ er større end $GK(j\omega)\ell_m(\omega)$:

$$|1 + GK(j\omega)| > |GK(j\omega)\ell_m(\omega)|, \quad \forall \omega \quad (2.7)$$

Dette udtryk kan omskrives til følgende:

$$\frac{|GK(j\omega)|}{|1 + GK(j\omega)|} \ell_m(\omega) < 1, \quad \forall \omega \quad (2.8)$$

eller

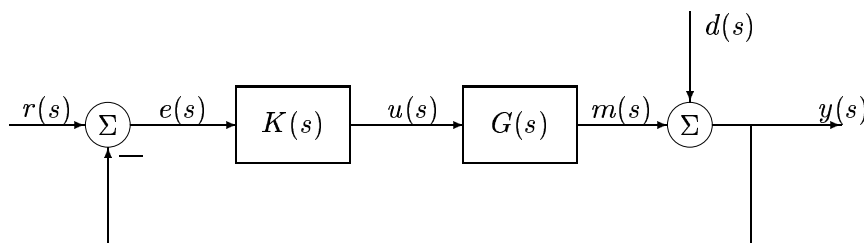
$$|T(j\omega)\ell_m(\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (2.9)$$

Hvor $T(s)$ er lukketsøjfe overføringsfunktionen fra referencen til output også kaldet den komplementære følsomhed. Hvis modelusikkerheden er specificeret ved begrænsning af størrelsen (normen) af modelafvigelsen får vi altså et analytisk udtryk som betingelse for robust stabilitet, hvilket giver mulighed for at anvende betingelsen direkte i designmetoder hvor der for eksempel indgår minimering. Hvis modelusikkerheden er givet på andre måder, for eksempel ved angivelse af usikkerhed på fase og amplitude vil det være mere oplagt at anvende designmetoder hvor det grafisk kontrolleres at usikkerhedsområdet for åbensløjfefunktionen ikke omfatter Nyquistpunktet $(-1,0)$

Kapitel 3

Nominel og robust ydeevne

I dette kapitel vil vi undersøge hvilke ydeevnekrav vi skal stille til det regulerede system.



Figur 3.1: *Standard feedback konfiguration.*

På Figur 3.1 er vist et standard feedback reguleret system. Det regulerede system har som input referencen r , og forstyrrelsen d . Da de 2 input med undtagelse af et fortegn resulterer i samme fejl e behandles de i det følgende samlet med betegnelsen v .

Regulatoren designs traditionelt til et specifikt input. Det gælder for klassiske designmetoder, hvor man ofte designer så det regulerede systems respons på step- eller rampeformede input overholder visse karakteristika som omtalt i Kapitel 1. Ligeledes sigter lineær kvadratisk kontrol mod at minimere fejlen ved et givet inputsignal.

I praksis er det ofte mere relevant at designe regulatoren til en klasse af beslægtede input som har samme karakteristika. Det, vi primært vil sigte på i denne fremstilling, er at undersøge regulatorernes undertrykkelse af fejl ved input, som har samme 'størrelse' udtrykt ved en norm.

3.1 Signálnormer.

For at kunne måle 'størrelsen' af et tidsmæssigt signal vil vi bruge en norm. Den norm vil bruge mest er *2-normen*, der er defineret som

$$\|v\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

Man kan imidlertid også definere en række andre normer signaler. For at en afbildning, $\|\cdot\|$ som f.eks ligning 3.1 af et tidssignal, $v(t)$ kan kaldes en norm kræves, at den har følgende 4 egenskaber

1. $\|v\| \geq 0 \quad \forall v$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v(t) = 0, \quad \forall t$
3. $\|av\| = |a| \|v\|, \quad \forall a \in \mathbb{R}e$
4. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

Det overlades til læseren, at kontrollere, at såvel 2-normen, som de nedenfor nævnte normer har disse egenskaber.

1-normen

$$\|v\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt \quad (3.2)$$

∞ -normen

$$\|v\|_{\infty} := \sup_t |v(t)| \quad (3.3)$$

1-normen af et signal kan repræsentere et forbrug af en resource. ∞ -normen kan være interessant, hvis man vil undersøge om et signal er begrænset, for eksempel fordi der er fysiske begrænsninger i systemet, der skal overholdes. 2-normen, som vi bruger mest, repræsenterer typisk energien i signalet.

Vi kan desuden definere funktionsrum for signaler $v(t)$, som har endelig værdi for henholdsvis 1-, 2- og ∞ -normen. Disse funktionsrum benævnes \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 og \mathcal{L}_{∞} (Lebesgue rum) eller \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 og \mathcal{H}_{∞} (Hardy rum). Hardy-rum bruges for signaler, hvor $v(t) = 0$ for $t < 0$. I denne note vil vi ikke komme nærmere ind på disse funktionsrum. Den interesserede læser henvises til [ZDG96] eller [TC96].

Udover de nævnte normer kan det være interessant at bruge en størrelse, der kan repræsentere middeleffekten

$$\|v\|_{\mathcal{P}} := \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

$\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ er ikke en norm, da den ikke har egenskab 2. Den er nyttig fordi den ofte er defineret for signaler hvor 2-normen ikke eksisterer og samtidig har de andre egenskaber som karakteriserer normer. Det gælder signaler hvor der vedvarende er endelig effekt. Hvis omvendt $\|v\|_2 < \infty$ så er $\|v\|_{\mathcal{P}} = 0$. $\|v\|_{\mathcal{P}}$ er også kendt som RMS (Root Mean Square) værdien af $v(t)$.

Man kan på samme måde som i tidsdomænet definere normer for signaler i frekvensdomænet. I denne note bruges små bogstaver for såvel tidssignaler som frekvenssignaler, så hvilken norm der er tale om vil fremgå af sammenhængen. De vigtigste frekvensdomæne normer er 2-normen og ∞ -normen

2-normen

$$\|v\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

Bemærk den meget vigtige sammenhæng (Parsevals sætning)

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(j\omega)|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

som betyder, at 2-normen af tids- og frekvensdomæne funktionerne er ens.

∞ -normen

$$\|v\|_{\infty} := \sup_{\omega} |v(j\omega)| \quad (3.7)$$

for ∞ -normen gælder ikke en sammenhæng svarende til Parsevals sætning (3.6).

3.2 Normer for systemer og overføringsfunktioner.

Da signaler forskellige steder i en proces er knyttet sammen af systemets dynamik, er det ligeledes interessant, at definere normer der knytter sig til systemet. Idet et system kan karakteriseres ved sin impulsrespons $g(t)$ eller sin overføringsfunktion $G(s) = \mathcal{L}(g(t))$ defineres 2-normen som:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

$$:= \|g\|_2 \quad (3.10)$$

Den midterste lighed er Parseval's sætning. For overføringsfunktioner definerer man ligeledes \mathcal{H}_{∞} -normen:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_{\infty}} := \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (3.11)$$

3.3 Specifikation af input.

Kendskab til de forekommende input til et system er vigtigt for at kunne specificere ydeevne af en reguleringsløjfe på en rimelig måde.

Vores fremgangsmåde er, at vi vil beskrive en klasse af input, som er begrænset af en norm, dernæst vil vi specificere ydeevne ved at sætte grænser for normen af vores output signal, oftest reguleringsfejlen e eller en filtreret udgave af fejlen. Til disse specifikationer vil vi bruge 2-normen eller eventuelt RMS værdien ¹.

En klasse af signaler kan defineres som de signaler v' der har en 2-norm, der er mindre end 1:

$$V' = \left\{ v'(s) : \|v'\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v'(j\omega)^* v'(j\omega) d\omega} \leq 1 \right\} \quad (3.12)$$

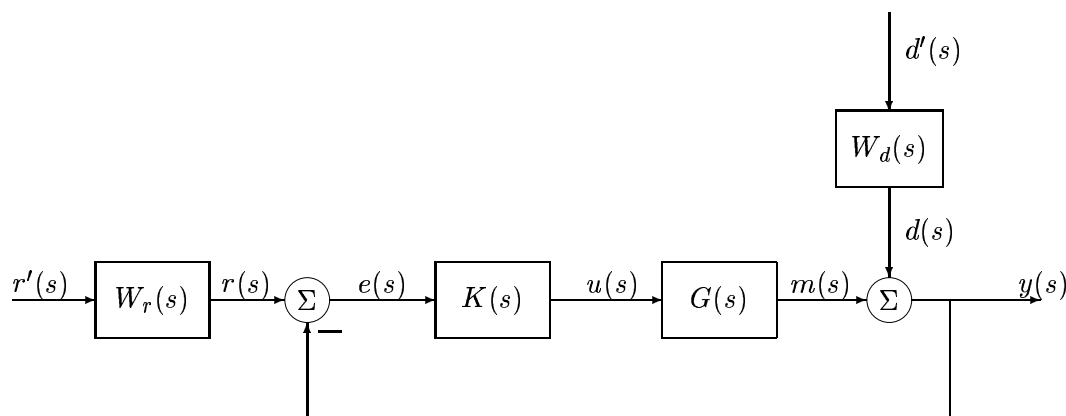
¹Brugen af andre normer til regulatorspecifikation kan være yderst relevant og er genstand for udforskning i øjeblikket. For eksempel kan brugen af 1-normen i tidsdomænet være relevant, hvis man ønsker at minimere forbrug af en resource.

Ved at filtrere v' kan vi danne en ny klasse af signaler v , der er karakteristiske som input til vores proces enten som forstyrrelse eller som reference.

$$V = \{v(s) = W(s)v'(s) : \|v'\|_2 \leq 1\} \quad (3.13)$$

Ved at designe reguleringssystemet så det minimerer normen af den fejl, der kan forekomme når en klasse normbegrænsede signaler er mulige input tager man hensyn til forskellige input under en hat. Det er fordelagtigt, siden man i designfasen sjældent med sikkerhed ved, hvilke referenceændringer eller forstyrrelser system vil møde i drift.

Vi kan således karakterisere referencen r og forstyrrelsen d ved at tilføje inputfiltre i vores standard feedback sløjfe, se Figur 3.2.



Figur 3.2: Reguleringssløjfe med enhedsnormbegrænsede signaler som input.

Eksempel 3.1 (Input Specifikation)

Dette eksempel er taget fra [MZ89]. Antag at vi ved at referencen $r(t)$ kun ændre sig i step og at der kun er små forstyrrelser således at $d(s) \approx 0$ og $v(s) = r(s)$. Vi skal da vælge en input vægt $W_r(s)$ således at $v(s) = s^{-1}$ og $v'(s) \in V'$. Umiddelbart ville det synes naturligt at vælge $W_r(s) = 1/s$ og lade $v'(s)$ være en impuls ($v'(s) = 1$). Imidlertid tilhører $v'(s) = 1$ ikke mængden V' , idet integralet i Ligning (3.12) bliver uendeligt (en impuls har ikke endelig 2-norm). Ergo giver vægten $W_r(s) = 1/s$ ikke de ønskede karakteristika for referencen $r(s)$. I stedet kan vi anvende vægten:

$$W_r(s) = \frac{s + \beta}{s\sqrt{2\beta}}, \quad \beta > 0 \quad (3.14)$$

Med dette filter er der i V indeholdt stepinput. Lad f.eks. $v'(s)$ være givet ved:

$$v'(s) = \frac{\sqrt{2\alpha}}{s + \alpha} \quad (3.15)$$

$v'(s) \in V'$ idet

$$\|v'\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v'(j\omega)^* v'(j\omega) d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} d\omega} = 1 \quad (3.16)$$

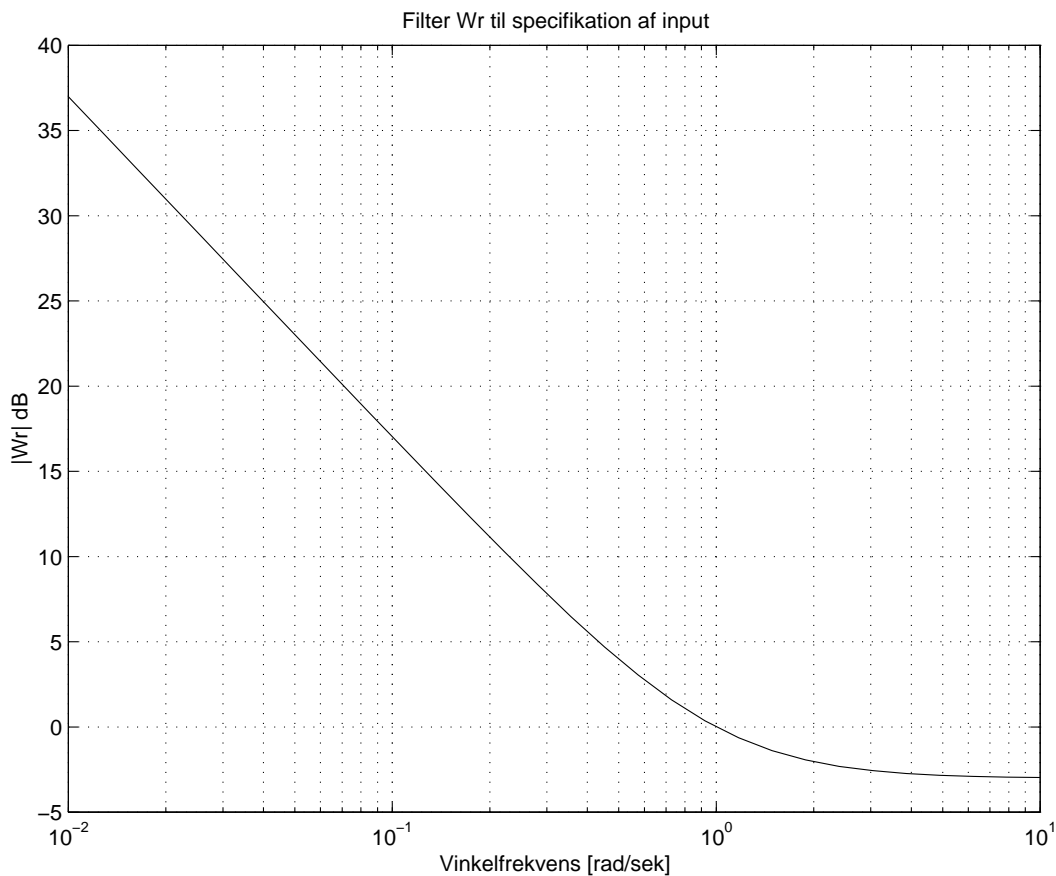
For $\alpha = \beta$ er $v(s)$ nu givet ved:

$$v(s) = W_r(s)v'(s) = \frac{s + \beta}{s\sqrt{2\beta}} \frac{\sqrt{2\beta}}{s + \beta} = \frac{1}{s} \quad (3.17)$$

Samtidigt kan $v(s)$ ved valg af α forskelligt fra β fås som lead/lag modificeret step.

$$v(s) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{s + \beta}{s(s + \alpha)} \quad (3.18)$$

Dette indebærer, at en regulator, der er designet for den normbegrænsede input-mængde givet ved ligning 3.13 med vægten fra ligning 3.14, vil fungere godt ikke alene for step-input, men også for steplignende input. Derudover vil V indeholde hele spektret af signaler hvor v' er normbegrænset for eksempel signaler med dæmpede sinusinput.



Figur 3.3: Eksempel på inputspecifikation ($\beta = 1$)

På figur 3.3 er vist et Bodeplot af amplituden af denne inputspecifikation med $\beta = 1$. En model af denne type stemmer godt overens med mange reguleringsproblemer, da den store amplitude ved lave frekvenser stemmer med, at lavfrekvente referenceændringer eller forstyrrelser forventes, at give anledning til lille reguleringsfejl, hvorimod reguleringsystemet ikke forventes at kunne undertrykke påvirkninger over en givet frekvensgrænse.

Den på Figur 3.2 viste konfiguration kan også bruges hvis man ønsker at designe sin regulator til et bestemt input. Man kan da lade v' være en impuls, $v'(s) = 1$. $v(s)$ bliver da et signal med samme Laplacetransformerede som $W(s)$.

Betragtes et sinusformet input v' , kan man ikke længere bruge 2-normen, da integralet i Ligning 3.1 ikke bliver endeligt. Det vil da være mere hensigtsmæssigt at bruge RMS værdien $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$. Hvis man stadig bruger filteret $W(s)$ ses det, at frekvenskarakteristikken for $W(j\omega)$ angiver hvor store amplituder af v reguleringsystemet forventes at blive udsat for (eller forventes at kunne behandle) ved forskellige frekvenser.

3.4 Krav til ydeevne.

Det endelige krav til regulatoren er, at den fungerer 'godt' på det virkelige system. Dette krav opdeles i delkrav:

1. Nominel stabilitet: Regulatoren skal sikre intern stabilitet i det regulerede system, når modellen er korrekt.
2. Nominel ydeevne: Regulatoren skal minimere fejlen e . (f.eks. udtrykt ved 2- normen af fejlen ved givne input).
3. Robust stabilitet: For alle modeller i \mathcal{G} se Ligning (2.2) skal regulatoren sikre intern stabilitet.
4. Robust ydeevne: For alle modeller i \mathcal{G} skal regulatoren sikre at samme krav som til nominel ydeevne overholdes.

Kravene 1) og 3) er tidligere behandlet. Ydeevnekravene 2) og 4) uddybes i det følgende.

Regulatoren har til formål at minimere den fejl e der opstår på grund af referencen r (servoproblemet) og forstyrrelsen d (reguleringsproblemet). De vigtigste overføringsfunktioner, jævnfør Figur 3.1, er

$$\frac{e(s)}{r(s)} = -\frac{e(s)}{d(s)} = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = S(s) \quad (3.19)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = T(s) \quad (3.20)$$

Størrelsen $S(s)$ kaldes følsomheden. $S(s)$ ønskes normalt 'lille' på grund af ønsket om at minimere fejlen e . $G(s)K(s)$ er for fysiske systemer "ægte" (engelsk: Proper. Dvs. orden af nævner større end eller lig ordenen af tæller). I praksis bør man endda regne med, at overføringsfunktionen er "strengt ægte" (engelsk: Strictly proper. Dvs. ordenen af nævner større end ordenen af tæller), svarende til at der ingen signalgennemgang er ved meget høje frekvenser.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)K(s) = 0 \quad (3.21)$$

Dette medfører at

$$\lim_{s \rightarrow \infty} S(s) = 1 \quad (3.22)$$

Følsomheden $S(s)$ kan altså kun fås 'lille' over et begrænset frekvensområde. Størrelsen $T(s)$ kaldes den komplementære følsomhed på grund af relationen

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (3.23)$$

$T(s)$ ønskes tæt på 1 da y skal følge referencen. På grund af samme argumenter som ovenfor kan dette også kun realiseres over et begrænset frekvensområde, da

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = 0 \quad (3.24)$$

3.5 \mathcal{H}_2 optimal regulering (LQ).

Som mål for hvor god en regulator er, benyttes ofte integralet af kvadratet på fejlen ved et givet referencesignal eller en given forstyrrelse. Ved \mathcal{H}_2 optimal eller lineær kvadratisk (LQ) regulering antages inputtet $v'(s)$ at være lig en impuls $v'(s) = 1$. Den optimale regulator er med andre ord den, der minimerer 2-normen af fejlen ved et specifikt input som kan dannes ved $v(s) = W(s)1$. K bliver da den regulator der løser følgende minimeringsproblem

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|e\|_2 = \min_{K \in \mathcal{K}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

$$= \min_{K \in \mathcal{K}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

$$= \min_{K \in \mathcal{K}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)v(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

$$= \min_{K \in \mathcal{K}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)W(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

$$= \min_{K \in \mathcal{K}} \|SW\|_{\mathcal{H}_2} \quad (3.29)$$

hvor \mathcal{K} er mængden af alle stabiliserende regulatorer.

En \mathcal{H}_2 -optimal regulator $K(s)$ minimerer således \mathcal{H}_2 -normen af følsomheden S vægtet med W .

3.6 \mathcal{H}_∞ - optimal regulator.

I stedet for at bestemme en regulator, der minimerer fejlen for et specifikt input, kan man vælge at bestemme en regulator, der minimerer den maksimale fejl for alle input indeholdt i V , se Ligning (3.13), dvs. for alle normbegrænsede signaler, der er vægtet med en frekvensafhængig vægt $W(s)$. Med denne input-specifikation dimensioneres regulatoren for en klasse af input, som hvis man ikke har præcist kendskab til det aktuelle indput kan være mere i overensstemmelse med de faktisk forhold end det specifikke input, der benyttes i forbindelse med \mathcal{H}_2 -optimale regulatorer.

Vi ønsker nu at bestemme en regulator, der minimerer fejlen for alle input indeholdt i V . Med andre ord ønsker vi at bestemme den regulator K , der minimerer den største værdi, 2-normen

af fejlen e kan antage, for input v indeholdt i V . Dette kan udtrykkes som

$$K(s) = \arg \min_{K \in \mathcal{K}} \sup_{v \in V} \|e\|_2 = \min_{K \in \mathcal{K}} \sup_{v' \in V'} \|SWv'\|_2 \quad (3.30)$$

For at kunne finde den optimale regulator K må vi først fastlægge hvilket input, der for en given K giver den største værdi af 2-normen af fejlen:

$$\sup_{v \in V} \|e\|_2 = \sup_{v' \in V'} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)W(j\omega)v'(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

Man kan vise, at dette integral antager sin største værdi hvis v' er et sinusformet signal der er modificeret så 2-normen eksisterer. Dette kan f.eks være et sinussignal med endelig men lang varighed og amplitude afpasset så normen er 1. Vinkelfrekvensen af sinussignalet skal da være den frekvens, hvor $|S(j\omega)W(j\omega)|$ har sin maksimale værdi. Vi har da

$$\sup_v \|e\|_2 = \sup_{\omega} |S(j\omega)W(j\omega)| = \|SW\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \quad (3.32)$$

Vi har altså fundet, at den største værdi, 2-normen af fejlen kan antage for noget input i V , er lig med \mathcal{H}_{∞} -normen af SW . Den regulator, der ønskes, er da den der løser minimeringsproblemet

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \sup_{v \in V} \|e\|_2 = \min_{K \in \mathcal{K}} \|SW\|_{\mathcal{H}_{\infty}} = \min_{K \in \mathcal{K}} \sup_{\omega} |S(j\omega)W(j\omega)| \quad (3.33)$$

Den \mathcal{H}_{∞} optimale regulator minimerer med andre ord \mathcal{H}_{∞} -normen af følsomhedsfunktionen $S(s)$ vægtet med $W(s)$.

Man ser altså, at den \mathcal{H}_2 optimale regulator minimerer middelværdien over alle frekvenser af kvadratet på $|S(j\omega)W(j\omega)|^2$, mens den \mathcal{H}_{∞} optimale regulator minimerer maksimalværdien af $|S(j\omega)W(j\omega)|$.

Ved en skalering af $W(j\omega)$ vil det da være muligt at formulere \mathcal{H}_{∞} kravet om nominel ydeevne som

$$|S(j\omega)W(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (3.34)$$

eller

$$\|SW\|_{\mathcal{H}_{\infty}} < 1 \quad (3.35)$$

Fordelene ved at anvende \mathcal{H}_{∞} -normen til specifikation af ydeevnekravet fremfor \mathcal{H}_2 -normen er:

- Designeren kan direkte begrænse den peakværdi, som $S(j\omega)$ kan antage ved at lægge begrænsninger på inputvægten $W(j\omega)$.
- Designeren kan ved hjælp af inputvægten $W(j\omega)$ direkte angive den ønskede båndbredde på følsomhedsfunktionen $S(j\omega)$, defineret som den værdi af ω hvor $S(j\omega)$ kommer under $\sqrt{2}$ (3 dB).

Hertil kommer, at \mathcal{H}_{∞} -normen gør det muligt, at formulere et designvenligt krav til robust ydeevne, hvilket fremgår af næste afsnit.

3.7 Robust ydeevne.

Hvis vi kun stiller krav til nominal ydeevne og til robust stabilitet, kan der i \mathcal{G} være indeholdt en model, som er på kanten af ustabilitet. Denne vil derfor give en dårlig ydeevne. For at være sikker på at regulatoren fungerer godt for alle modeller i \mathcal{G} må vi kræve ydeevnekravene, overholdt for alle modeller i \mathcal{G} .

3.8 \mathcal{H}_2 - robust ydeevne

Ved den \mathcal{H}_2 optimale, robuste regulator forstås den regulator, der giver den mindste ydeevne for den værste procesmodel i \mathcal{G} . Vi må derfor finde den model, der giver den dårligste ydeevne, dvs. finde den model, der for et givet input v , giver den største 2-norm af fejlen

Maksimalværdien af 2-normen af fejlen kan bestemmes ved for hver frekvens at finde maksimalværdien af den perturberede følsomhed $S_\Delta(j\omega)$ ved geometriske betragtninger

$$S_\Delta(j\omega) = \frac{1}{|1 + G_\Delta(j\omega)K(j\omega)|} \quad (3.36)$$

$$\leq \frac{1}{|1 + G(j\omega)K(j\omega)| - |G(j\omega)K(j\omega)\ell_m(\omega)|} \quad \forall G_\Delta \in \mathcal{G} \quad (3.37)$$

$$= \frac{|S(j\omega)|}{1 - |T(j\omega)\ell(\omega)|} G_\Delta \in \mathcal{G} \quad (3.38)$$

Ligning (3.38) angiver en øvre grænse for følsomhedsfunktionen $S_\Delta(j\omega)$, som igen kan bruges til at beregne den største værdi af 2-normen for en givet regulator $K(j\omega)$

$$\max_{G_\Delta \in \mathcal{G}} \|e\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)W(j\omega)|^2}{|1 - |T(j\omega)\ell_m(\omega)||^2} d\omega} \quad (3.39)$$

Nævneren i udtrykket under integraltegnet skyldes usikkerhed i modellen. Opgaven er nu at bestemme den regulator, der giver den minimale værdi af den værste ydeevne givet ved ovenstående udtryk. Dette er ikke umiddelbart muligt, da K påvirker integralet på en kompliceret måde. Udtrykket kan derimod anvendes til at kontrollere om en given regulator opfylder de ydeevnekrav der er opstillet.

Regulatoren må altså designes på andre måder. De metoder, man anvender, indrager variationer i styresignalet i den ydeevne, der minimeres (f. eks. GPC (General Predictive Control) og LQG (Linear Quadratic Gaussian)).

3.9 \mathcal{H}_∞ - robust ydeevne.

Den \mathcal{H}_∞ - optimale robuste regulator er den regulator, der minimerer den største værdi af $|S_\Delta(j\omega)|$ vægtet med $W(j\omega)$ for den værste procesmodel.

I følge kravet til \mathcal{H}_∞ nominal ydeevne i Ligning (3.33), skal regulatoren for alle procesmodeller opfylde kravet:

$$\|S_\Delta W\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} |S_\Delta(j\omega)W(j\omega)| < 1 \quad \forall G_\Delta \in \mathcal{G} \quad (3.40)$$

Den model G_Δ i \mathcal{G} , som giver den største værdi af $S_\Delta(j\omega)$, er bestemt i Ligning (3.38). Ved indsættelse i Ligning (3.40) fås kravet:

$$\frac{|S(j\omega)W(j\omega)|}{|1 - |T(j\omega)\ell_m(\omega)||} < 1 \quad \forall \omega \quad (3.41)$$

Ved omskrivning fås:

$$|S(j\omega)W(j\omega)| + |T(j\omega)\ell_m(\omega)| < 1 \quad \forall \omega \quad (3.42)$$

Der er hermed formuleret betingelser for robust ydeevne og robust stabilitet for SISO systemer.

Et eksempel på en sådan specifikation stammer fra regulering af en vandforsyningspumpe med en maksimal ydelse på $3 \text{ m}^3/\text{h}$ ved 2.5 bar. Kravene var her oprindeligt formuleret i tidsdomænet som krav til fejl på trykket ved et step i vandforbrug på $0.67 \text{ m}^3/\text{h}$

- maksimal transient fejl: 0.4 bar
- settling tid for fejl på 0.1 bar: 2 sek
- maksimal stationær fejl: 0.1 bar

Vandforbruget påvirker trykket på en måde omtrent som gennem et førsteordens system. Forstyrrelse kan altså modelleres som

$$d(s) = \frac{K}{s\tau + 1} \frac{K_s}{s} \quad (3.43)$$

hvor $KK_s = 1.3 \text{ bar}/(\text{m}^3/\text{h})$ og $\tau = 0.75 \text{ sek}$. For en given følsomhedsfunktion kan den tilsvarende respons på forstyrrelsen nu beregnes. Der blev valgt en 1. ordens følsomhedsgrænse S_p med en højfrekvens forstærkning lidt over 1:

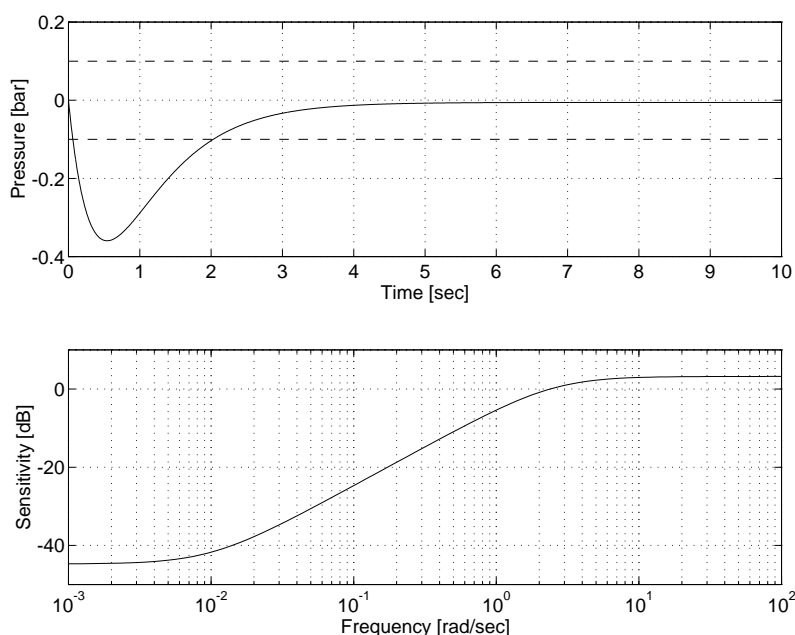
$$S_p(s) = \frac{1.4(s + 0.01)}{s + 2.5} \quad (3.44)$$

På Figur 3.4 er vist tidsrespons og frekvensrespons af denne specifikation. Tidsresponsen ses at overholde de oprindelige krav. Det antages derfor, at en sensitivitet der ved alle frekvenser ligger under denne specifikation også vil overholde tidsdomænekravene. Bemærk, at denne antagelse ikke holder teoretisk i det generelle tilfælde, men har vist sig anvendelig i praksis. Vi kan herefter formulere en vægtfunktion, der svarer til denne grænse

$$W_p(z) = \frac{1}{S_p(z)} \quad (3.45)$$

Usikkerhederne i fysiske systemer er ofte størst ved høje frekvenser. For pumpem er overføringsfunktionen bestemt ved systemidentifikation hvor inputsignalet har været et firkantsignal med frekvensen 0.4 Hz, svarende 2.51 rad/sek. Den multiplikative modelusikkerhed, som blev estimeret ved systemidentifikationen er derfor mindst ved denne frekvens og er iøvrigt størst ved høje frekvenser. På Figur 3.5 er vist specifikationerne for for sensitivitet givet ved W og komplementær sensitivitet givet ved l_m for pumpen

I Kapitel 6 og Kapitel 7 behandles designalgoritmer som tager sigte på, et opfyldte krav af denne type.



Figur 3.4: Tidsdomæne respons på forstyrrelsen og den tilsvarende frekvensrespons af følsomheds specificationen $S_p(s)$.

3.10 Sløjfetilpasning (loop shaping)

En klassisk måde at opnå et godt design er at tilpasse åbensløjfe overføringsfunktionen, så den har et passende forløb. Det er derfor af interesse, at undersøge om kravene til robust stabilitet, nominal ydeevne og robust ydeevne kan omformuleres til åbensløjfe krav.

I frekvensområder, hvor $|W(j\omega)|$ er meget større end 1 er kravet til nominal ydeevne, at sensitiviteten skal være meget mindre end 1. Kravet til sensitiviteten kan hermed god tilnærmelse omformuleres til nedenstående krav til åbensløjfe forstærkningen

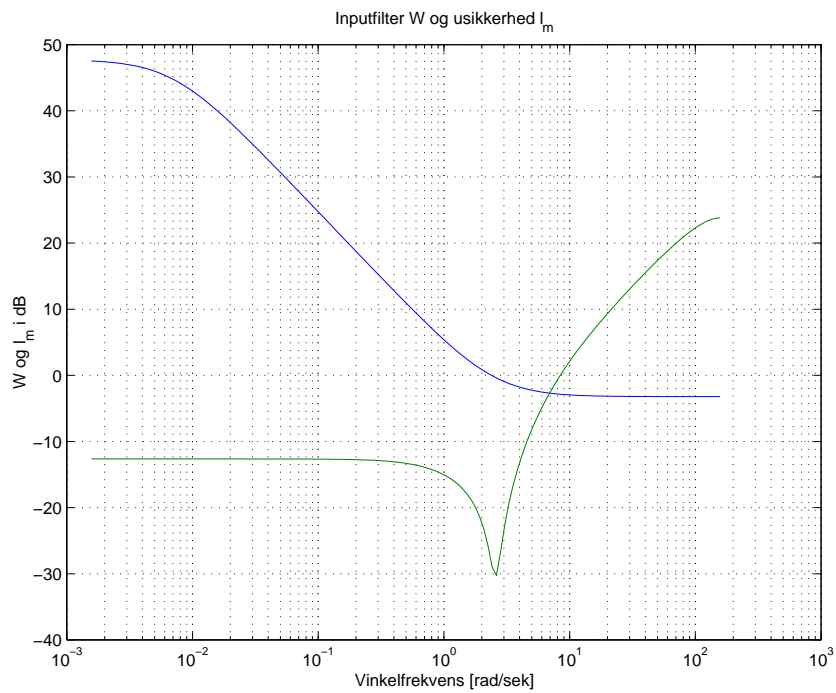
$$|K(j\omega)G(j\omega)| > |W(j\omega)| \quad (3.46)$$

Tilsvarende kan kravene til robust stabilitet kan i frekvensområder hvor $l_m(\omega)$ er meget større end 1 omformuleres til

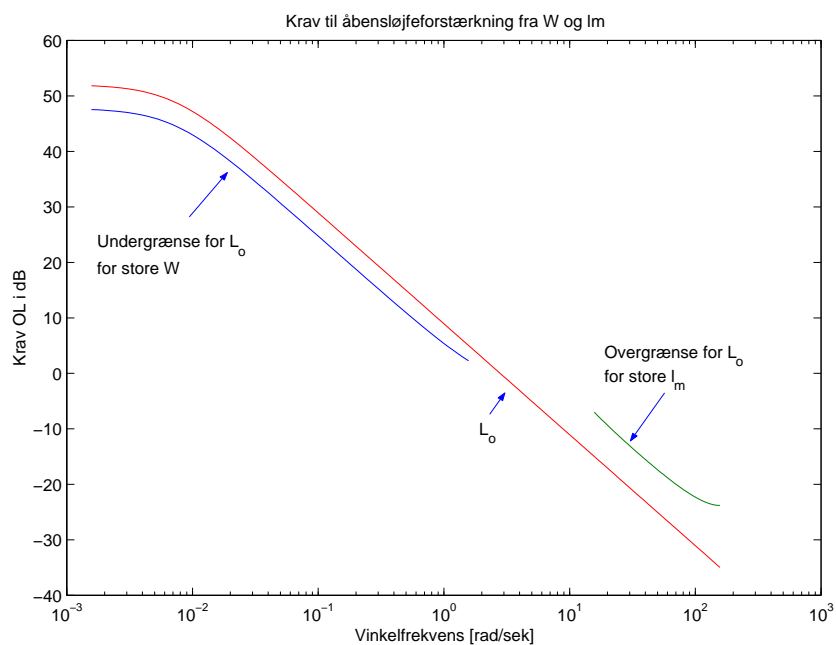
$$|K(j\omega)G(j\omega)| < \left| \frac{1}{l_m(j\omega)} \right| \quad (3.47)$$

På Figur 3.6 er sådanne krav vist for pumpesystemet sammen en åbensløjfekandidat, som opfylder kravene.

En sådan design metode lægger op til, at processns dynamik inverteres. Det er derfor vigtigt, at være opmærksom på, at plombering af processens poler og nulpunkter i højre halvplan skal undgås da det vil medføre at lukketsløjfen bliver ustabil.



Figur 3.5: *Kombination af inputspecifikation og usikkerhed*



Figur 3.6: *Krav til åbensløjfe forstærkningen fra W og l_m i frekvensområder hvor de hver især er store*

Specifikation af vægtfunktionerne ses på denne måde at være et spørgsmål om trade-off mellem god forstyrrelsesundertrykkelse og robusthed og det interessante valg bliver den frekvens hvor kurverne krydser hinanden. Ved denne frekvens skal man sikre sig, at begge vægtfunktioner er mindre end 1 for at kravene er mulige at opfylde. I frekvensområdet hvor $W(j\omega)$ og $l_m(\omega)$ krydser 1 giver kravet til robust ydeevne desværre ikke noget krav, som direkte kan oversættes til et åbensløjfe krav. Robust ydeevnekravet må altså ved et design af denne type opfyldes ved trial and error.

Kapitel 4

Introduktion til flervariable systemer

I dette kapitel vil vi give en introduktion til forskellige værktøjer til analyse af flervariable systemer. Specielt vil vi se på poler og nulpunkter af flervariable systemer, den generaliserede Nyquist sætning til stabilitetsanalyse af flervariable systemer samt frekvensresponsanalyse af flervariable systemer ved hjælp af singularværdier.

4.1 Poler og nulpunkter af flervariable systemer

For et single-input single-output (SISO) system med overføringsfunktionen

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.1)$$

er polerne defineret som de værdier af den komplekse variable s , hvor $G(s) = \infty$, og nulpunkterne defineret som de værdier af s , hvor $G(s) = 0$.

For et multiple-input multiple-output (MIMO) system med *overføringsmatricen*:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1n_u}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{n_y1}(s) & G_{n_y2}(s) & \dots & G_{n_y n_u}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

kan polerne defineres analogt til SISO systemet; nemlig som polerne af samtlige skalære overføringsfunktioner $G_{11}(s) \cdots G_{n_y n_u}(s)$ i $G(s)$. Denne definition er rimelig, idet mindst en af de skalære overføringsfunktioner $G_{11}(s) \cdots G_{n_y n_u}(s)$ er lig med ∞ , når s har værdien af en pol. Ergo er mindst et af elementerne i overføringsmatricen lig ∞ , når s er lig en pol.

Nulpunkter af flervariable systemer kan imidlertid *ikke* defineres analogt med SISO tilfældet, idet overføringsmatricen $G(s)$ ikke er lig med nul bare fordi en af de skalære overføringsfunktioner $G_{11}(s) \cdots G_{n_y n_u}(s)$ er lig med nul. Således er nulpunkterne af et flervariabelt system ikke lig med nulpunkterne for de enkelte skalære overføringsfunktioner $G_{11}(s) \cdots G_{n_y n_u}(s)$. Nulpunkterne af en overføringsmatrix $G(s)$ defineres istedet som de værdier af den komplekse variable s , hvor $G(s)$ taber rang. Rang af en matrix A er defineret som antallet af lineært uafhængige rækkevektorer i A og skrives

$$\text{rank } A \quad (4.3)$$

Vi har da fig. definition af nulpunkter i flervariable systemer.

Definition 4.1 (Nulpunkter i flervariable systemer) *Nulpunkterne af en overføringsmatrix $G(s)$ defineres som de værdier af den komplekse variable s , hvor $\text{rank } G(s)$ falder under dens normale værdi.*

Nulpunkter defineret på denne måde kaldes for *transmissions-nulpunkter*. Grunden hertil kan ses af følgende ræsonnement. Hvis overføringsmatricen $G(s)$ taber rang for $s = z_0$ kan det vises, se Afsnit 4.3.3, at der eksisterer en inputvektor u_0 forskellig fra 0 således at

$$G(z_0)u_0 = 0 \quad (4.4)$$

Ergo "blokeres" der for bestemte inputsignaler (transmissioner) for $G(s = z_0)$. Man siger at transmissionsnulpunkter har transmissionsblokerende egenskaber.

4.1.1 Smith-McMillan form af en overføringsmatrix

Poler og transmissionsnulpunkter af en overføringsmatrix $G(s)$ kan bl.a. findes ved at transformere $G(s)$ til dens *Smith-McMillan Form*. Det kan vises, at enhver ægte¹ overføringsmatrix $G(s)$ kan omskrives til sin Smith-McMillan form:

$$G(s) = U_1(s)M(s)U_2(s) \quad (4.5)$$

$$= U_1(s)\text{diag} \left\{ \frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}, \dots, \frac{\chi_r(s)}{\phi_r(s)}, 0, \dots, 0 \right\} U_2(s) \quad (4.6)$$

hvor $U_1(s)$ og $U_2(s)$ er *unimodulære* matricer. $U(s)$ er en unimodulær matrix hvis og kun hvis dens determinant $\det U(s)$ er uafhængig af s (dvs. at $\det U(s) = \text{konstant}$). $M(s)$ er en pseudodiagonal matrix og kaldes Smith-McMillan formen af $G(s)$. Vi siger at $G(s)$ og $M(s)$ er *ækvivalente* skrevet $G(s) \sim M(s)$. Det er klart at $G(s)$ og $M(s)$ generelt ikke er lig med hinanden $G(s) \neq M(s)$. Polynomierne $\{\chi_i(s), \phi_i(s)\}$ er moniske (dvs. med koefficienten 1 for s i højeste potens) og indbyrdes primiske (dvs. ingen fælles faktorer) og har fig. divisionsegenskaber:

$$\left. \begin{array}{l} \chi_i(s) | \chi_{i+1}(s) \\ \phi_{i+1}(s) | \phi_i(s) \end{array} \right\} \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (4.7)$$

Notationen $\chi_i(s) | \chi_{i+1}(s)$ betyder, at polynomiet $\chi_{i+1}(s)$ går op i polynomiet $\chi_i(s)$ uden restled. Vi definerer nu pol- og nulpunktpolynomierne:

$$p(s) = \phi_1(s)\phi_2(s) \cdots \phi_r(s) \quad (4.8)$$

$$z(s) = \chi_1(s)\chi_2(s) \cdots \chi_r(s) \quad (4.9)$$

Det kan da vises, at polerne og transmissionsnulpunkterne i overføringsmatricen $G(s)$ kan findes som rødderne i henholdsvis $p(s)$ og $z(s)$. Graden af polpolynomiet $p(s)$ kaldes *McMillan graden* af $G(s)$.

For at bestemme Smith-McMillan formen af $G(s)$, tages udgangspunkt i, at det kan vises, at $M(s)$ kan bestemmes via en serie af elementære række- og søjleoperationer på $G(s)$. Lad $d(s)$

¹En overføringsmatrix $G(s)$ er ægte hvis der for enhver af dens elementer $G_{ij}(s)$ gælder, at $|G_{ij}(s)| \rightarrow c_{ij} < \infty$ for $s \rightarrow \infty$ og strengt ægte hvis $|G_{ij}(s)| \rightarrow 0$ for $s \rightarrow \infty$.

være den mindste fællesnævner for elementerne $G_{ij}(s)$ af $G(s)$. $G(s)$ kan da skrives som:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}N(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & \cdots & N_{1n_u}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ N_{n_y1}(s) & \cdots & N_{n_y n_u}(s) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

hvor $N(s)$ er en polynomialmatrix (ikke en overføringsmatrix). Der er nu 3 elementære række- eller søjleoperationer vi kan lave på $N(s)$:

- Ombytning af 2 rækker eller søjler.
- Multiplikation af en række eller søjle med en konstant.
- Addition af en række eller søjle ganget med et polynomium til en anden.

Fælles for disse operationer er, at de ikke ændrer rangen af matricen $N(s)$. Hver af disse elementære operationer kan repræsenteres ved at multiplicere $N(s)$ med en passende matrix $L(s)$, kaldet en *elementær matrix*. Det kan vises, at alle elementærmatrixer er unimodulære. $N(s)$ kan nu ved en sekvens af række- og søjleoperationer omskrives som

$$N(s) = L_1(s)S(s)L_2(s) \quad (4.11)$$

$$= L_1(s)\text{diag}\{\epsilon_1(s), \epsilon_2(s), \dots, \epsilon_r(s), 0, 0, \dots, 0\}L_2(s) \quad (4.12)$$

Her er $S(s)$ en pseudodiagonal polynomialmatrix. $S(s)$ kaldes for *Smith formen* af $N(s)$. Polynomierne $\epsilon_i(s)$ er moniske og har flg. divisionsegenskaber:

$$\epsilon_i(s) | \epsilon_{i+1}(s), \quad i = 1, \dots, r-1 \quad (4.13)$$

Ergo er Smith formen af en polynomialmatrix ækvivalent til Smith-McMillan formen af en overføringsfunksionsmatrix. Pointen er nu, at polynomierne $\epsilon_i(s)$ kan bestemmes ud fra *determinant divisorene*:

$$D_0(s) = 1 \quad (4.14)$$

$$D_i(s) = \text{største fællesdivisor for alle } i \times i \text{ underdeterminanter af } N(s) \quad (4.15)$$

hvor hver af de største fællesdivisorer normaliseres til et monisk polynomium. Det kan da vises, se [Mac89, side 40–43], at polynomierne $\epsilon_i(s)$ er givet ved:

$$\epsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.16)$$

Smith-McMillan formen for $G(s)$ er da givet som:

$$M(s) = \frac{1}{d(s)}S(s) \quad (4.17)$$

Ergo får vi flg. procedure til bestemmelse af Smith-McMillan formen for $G(s)$:

Procedure 4.1 (Smith-McMillan formen for en overføringsmatrix)

1. Lad $G(s)$ være en ægte overføringsmatrix. Find den mindste fællesnævner $d(s)$ for alle elementerne i $G(s)$ og omskriv til:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}N(s) \quad (4.18)$$

2. Bestem Smith formen af $N(s)$:

$$N(s) \sim S(s) = \text{diag} \{ \epsilon_1(s), \epsilon_2(s), \dots, \epsilon_r(s), 0, 0, \dots, 0 \} \quad (4.19)$$

hvor $\epsilon_i(s)$ bestemmes ud fra determinant divisorene $D(s)$:

$$\epsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.20)$$

3. Smith-McMillan formen for $G(s)$ er da givet ved:

$$G(s) \sim M(s) = \frac{1}{d(s)} S(s) \quad (4.21)$$

Det følgende eksempel er taget fra [Mac89, Ex. 2.2].

Eksempel 4.1 (Smith-McMillan form af en overføringsmatrix)

Lad $G(s)$ været givet ved:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} & \frac{-1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{s^2 + s - 4}{s^2 + 3s + 2} & \frac{2s^2 - s - 8}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{s - 2}{s + 1} & \frac{2s - 4}{s + 1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Den mindste fællesnævner for $G_{ij}(s)$ er $d(s) = s^2 + 3s + 2$ og vi kan skrive $G(s)$ som

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ (s - 2)(s + 2) & (2s - 4)(s + 2) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{d(s)} N(s) \quad (4.24)$$

Smith formen for polynomialmatricen $N(s)$ er givet ved

$$N(s) \sim S(s) = \text{diag} \{ \epsilon_1(s), \epsilon_2(s) \} \quad (4.25)$$

hvor $\epsilon_i(s)$ bestemmes ud fra determinant divisorene $D(s)$:

$$\epsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}, \quad i = 1, 2 \quad (4.26)$$

Vi får nu

$$D_0(s) = 1 \quad (4.27)$$

$$D_1(s) = \text{sfd} \{ 1, -1, s^2 + s - 4, 2s^2 - s - 8, s^2 - 4, 2s^2 - 8 \} = 1 \quad (4.28)$$

$$D_2(s) = \text{sfd} \left\{ \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{array} \right| \right\} \quad (4.29)$$

$$= \text{sfd} \{ 3(s^2 - 4), 3(s^2 - 4), 3s(s^2 - 4) \} = s^2 - 4 = (s + 2)(s - 2) \quad (4.30)$$

sfd står for største fællesdivisor. Vi har nu

$$\epsilon_1(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = 1 \quad (4.31)$$

$$\epsilon_2(s) = \frac{D_2(s)}{D_1(s)} = (s+2)(s-2) \quad (4.32)$$

hvorfor Smith-McMillan formen for $G(s)$ er givet ved:

$$G(s) \sim M(s) = \frac{1}{d(s)} S(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

idet vi har forkortet de fælles led i tæller og nævner ud. Pol- og nulpunktspolynomierne for $G(s)$ er således givet som

$$p(s) = (s+1)^2(s+2) \quad (4.34)$$

$$z(s) = s-2 \quad (4.35)$$

$G(s)$ har således polerne $s = -1, -1, -2$ og transmissionsnulpunktet $s = 2$.

4.1.2 Tilstandsbeskrivelser

Et system beskrevet ved tilstandsformen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.36)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.37)$$

kan skitseres som i Figur 4.1. Da en integration i tidsdomænet svarer til s^{-1} i s -domænet kan overføringsmatricen $G(s)$ svarende til det tilstandsbeskrevne systems skrives

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.38)$$

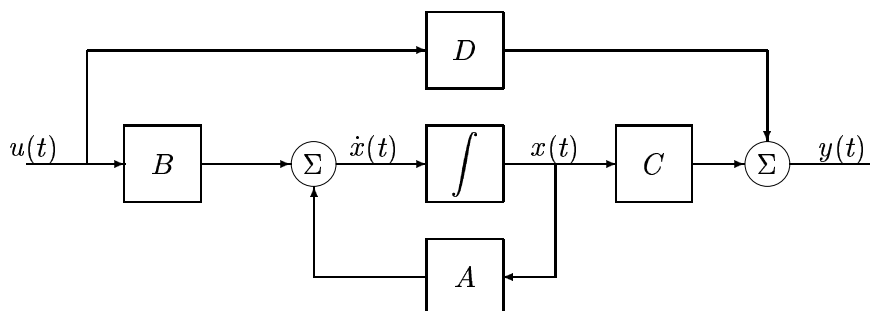
hvor I er en enhedsmatrix med samme dimension som A . Den inverse af en non-singulær kvadratisk matrix X er givet ved

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X} \text{adj } X \quad (4.39)$$

hvor $\text{adj } X$ er den adjungerede til X . Så hvis $sI - A$ er non-singulær kan vi skrive $G(s)$ som

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} C \text{adj}(sI - A) B + D \quad (4.40)$$

Da $C \text{adj}(sI - A) B$ er en polynomialmatrix er det klart at alle poler i $G(s)$ (nemlig de værdier af s for hvilke $G(s) = \infty$) må være et nulpunkt i $\det(sI - A)$. Nulpunkter i $\det(sI - A)$ er det samme som egenverdierne af A . Ergo er alle poler i $G(s)$ også egenverdier af A . Det modsatte er imidlertid ikke altid tilfældet, idet nulpunkter i $\det(sI - A)$ kan blive forkortet ud i Ligning (4.38) og således ikke kommer til at optræde som poler i $G(s)$. Dette er tilfældet



Figur 4.1: Tilstandsbeskrevet system.

når realisationen (A, B, C, D) ikke er styrbar eller observerbar. På den anden side, hvis realisationen (A, B, C, D) er styrbar og observerbar, så vil nulpunkter i $\det(sI - A)$ være lig med polerne i $G(s)$ og pol-polynomiet $p(s)$ vil være givet ved

$$p(s) = \det(sI - A) \quad (4.41)$$

Dette betyder, at dimensionen af A ikke kan være mindre end McMillan graden af $G(s)$. Derfor kaldes en tilstandsrealisation, som er både styrbar og observerbar for en *minimal realisation*. Vi kan nu summere ovennævnte resultater i følgende sætning.

Sætning 4.1 (Poler i tilstandsbeskrevne systemer) *Lad $G(s)$ være en overføringsmatrix med en minimal realisation (A, B, C, D) og $p(s)$ være Smith-McMillan polynomiet af $G(s)$. Så gælder det at*

$$\dim A = \deg p(s) \quad (4.42)$$

Altså: McMillan graden af $G(s)$ er lig med dimensionen af en minimal realisation. Desuden er egenverdierne af A lig med polerne af $G(s)$. Bemærk at hvis (A, B, C, D) er en realisation, der ikke er minimal, så vil polerne i $G(s)$ udgøre en delmængde af egenverdierne af A .

4.1.2.1 Fra overføringsmatrix til tilstandsbeskrivelse

Transformationen af et tilstandsbeskrevet system til en overføringsmatrix er entydig, nemlig givet ved Ligning (4.38). Modsat er der mange måder, hvorpå en overføringsmatrix kan transformeres til en tilstandsbeskrivelse. En umiddelbar fremgangsmåde er at bestemme separate tilstandsbeskrivelser for hver søjle i $G(s)$ – dvs. for hvert input – og så samle disse beskrivelser til en samlet tilstandsform. Lad $G_i(s)$ være den i 'te søjle i $G(s)$ således at

$$G(s) = [G_1(s), G_2(s), \dots, G_{n_u}(s)] \quad (4.43)$$

Opskriv da hver søjle som

$$G_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} + \delta_i \quad (4.44)$$

hvor $d_i(s)$ er fællesnævnerpolynomiet af $G_i(s)$:

$$d_i(s) = s^{k_i} + d_i^1 s^{k_i-1} + \dots + d_i^{k_i} \quad (4.45)$$

Bemærk at $d_i(s)$ er monisk. $n_i(s)$ er en vektor af polynomier, som hver har orden mindre end k_i . Det j 'te element af $n_i(s)$ kan skrives som polynomiet:

$$n_{ji}(s) = n_{ji}^1 s^{k_i-1} + n_{ji}^2 s^{k_i-2} + \dots + n_{ji}^{k_i} \quad (4.46)$$

δ_i er en vektor indeholdende konstanter.

En styrbar kanonisk tilstandsbeskrivelse af søjlen $G_i(s)$ er nu givet ved realisationen $(A_i, B_i, C_i, \delta_i)$ med

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_i^{k_i} & -d_i^{k_i-1} & -d_i^{k_i-2} & -d_i^{k_i-3} & \dots & -d_i^1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} n_{1i}^{k_i} & n_{1i}^{k_i-1} & \dots & n_{1i}^1 \\ n_{2i}^{k_i} & n_{2i}^{k_i-1} & \dots & n_{2i}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{n_y i}^{k_i} & n_{n_y i}^{k_i-1} & \dots & n_{n_y i}^1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Endelig kan en realisation (A, B, C, D) af $G(s)$ findes som

$$A = \text{diag} \{A_1, A_2, \dots, A_{n_u}\} \quad B = \text{diag} \{B_1, B_2, \dots, B_{n_u}\} \quad (4.49)$$

$$C = [C_1, C_2, \dots, C_{n_u}] \quad D = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_u}] \quad (4.50)$$

Denne realisation er styrbar, men ikke nødvendigvis observerbar. Hvis der specielt ønskes en minimal realisation, findes der algoritmer, hvormed de ikke-observerbare modes kan fjernes, se f.eks. [Mac89, Section 8.3.5]. MATLAB funktionen `tfm2ss.m` fra MATLAB's Robust Control Toolbox laver en lignende tilstandsrealisation og `minreal.m` fra MATLAB's Control Toolbox kan omforme en ikke-minimal tilstandsrealisation til en minimal realisation.

Bemærkning

I forbindelse med computer aided design i specielt MATLAB er det generelt nemmere at arbejde med tilstandsbeskrivelser, fordi det er vanskeligt at repræsentere overføringsmatricer (det kræver i princippet 3 dimensionelle strukturer). Imidlertid er robust regulering hovedsageligt baseret på frekvensresponsanalyse af diverse overføringsmatricer, f.eks. sensitiviteten $S(s)$ og den komplementære sensitivitet $T(s)$. Det er dog ikke noget problem at beregne frekvensresponsen ud fra en tilstandsbeskrivelse af systemet. Derfor vil man ofte repræsentere sit (flervariable) system på tilstandsform i MATLAB selvom analysen foregår i frekvensdomænet. Denne blanding af tids- og frekvensdomæne er iøvrigt meget symptomatisk for moderne robust regulering. Bl.a. er den mest udbredte løsning til \mathcal{H}_∞ regulatorproblemet givet ved hjælp af tilstandsmatricer, selvom problemet er givet i frekvensdomænet. Man har sågar introduceret en notation, hvor en overføringsmatrix gives ved hjælp af en tilstandsrealisation:

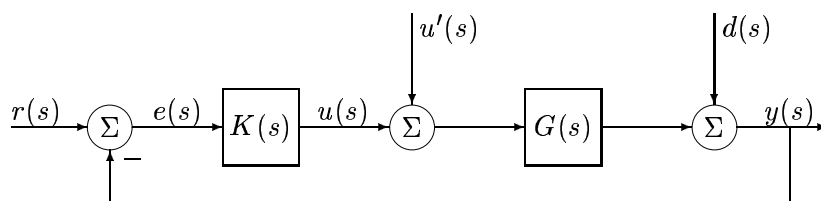
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4.51)$$

4.2 Nominel stabilitet af flervariabel systemer

Vi vil nu kigge på betingelserne for nominel stabilitet af flervariabel systemer. Disse betingelser er iøvrigt fuldstændig analoge med de tilsvarende for skalære (SISO) systemer. Som for SISO systemer er en flervariabelt system stabilt hvis samtlige dets (Smith-McMillan) poler er placeret i (den lukkede) venstre halvplan.

4.2.1 Intern stabilitet

Betragt det regulerede system i Figur 4.2. Nu antages det, at alle signaler er vektorer og alle overføringsfunktioner er matricer af korrekte dimensioner.



Figur 4.2: Reguleret flervariabelt system.

Ved intern stabilitet vil vi igen forstå, at påtrykkelse af et begrænset signal et vilkårligt sted i sløjfen ikke genererer et ubegrænset signal et andet sted i sløjfen. Som ved SISO systemer bliver betingelsen for intern stabilitet at overføringsmatricen fra $r(s)$ (eller $d(s)$) og $u'(s)$ til $y(s)$ og $u(s)$ er stabil. Ergo kræves det for intern stabilitet at systemet:

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) & (I + G(s)K(s))^{-1}G(s) \\ K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} & -K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ u'(s) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

har alle sine poler i den lukkede venstre halvplan. Læg mærke til, at vi ikke bruger brøker i Ligning (4.52), da dette ikke giver mening for matricer. Desuden er det (meget) vigtigt at huske at matrix multiplikation *ikke* er kommutativ, dvs. at faktorernes orden i f.eks. $(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)$ ikke er ligegyldig, da $G(s)K(s) \neq K(s)G(s)$ generelt.

For at systemet i Ligning (4.52) skal være stabilt skal alle 4 overføringsmatricer være stabile.

Eksempel 4.2 (Intern stabilitet)

Hvis regulatoren $K(s)$ er stabil kan intern stabilitet checkes ved at checke hvorvidt overføringsfunktionen $(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)$ er stabil. Antag nemlig at $K(s)$ og $(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)$ faktisk er stabile overføringsfunktioner. I så fald vil enhver kombination (produkt) af disse to overføringsfunktioner være stabil. Således vil $(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)$ og $-K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)$ være stabile. Vi mangler da at vise, at også $(I + G(s)K(s))^{-1}$ er stabil. Det er imidlertid givet af

$$(I + G(s)K(s))^{-1} = I - (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) \quad (4.53)$$

samt stabiliteten af $(I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)$. På samme måde kan det let vises, at hvis systemet $G(s)$ er stabilt, er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for intern stabilitet af

lukket sløjfen i Figur 4.2, at $K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$ er stabil. Hvis både $K(s)$ og $G(s)$ er stabile kan intern stabilitet checkes ved stabilitetsanalyse af $(I + G(s)K(s))^{-1}$ eller simpelthen af lukketsløjfen.

4.2.2 Den generaliserede Nyquist sætning

Den generaliserede Nyquist sætning spiller en central rolle i robust regulerings teknik. Som den klassiske Nyquist Sætning for enkelt-variable systemer sætter den generaliserede Nyquist Sætning os istand til at vurdere stabiliteten af et reguleret system ved analyse af *åben sløjfen*, typisk $G(s)K(s)$.

Betragt systemet i Figur 4.2 for $u'(s) = 0$ og $d(s) = 0$. Lad åben sløjfen $G(s)K(s)$ have tilstandsbeskrivelsen

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o e(t) \quad (4.54)$$

$$y(t) = C_o x(t) + D_o e(t) \quad (4.55)$$

Når sløjfen lukkes får vi $e(t) = r(t) - y(t)$, hvorfor

$$y(t) = C_o x(t) + D_o (r(t) - y(t)) \quad (4.56)$$

$$\Leftrightarrow (I + D_o)y(t) = C_o x(t) + D_o r(t) \quad (4.57)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = (I + D_o)^{-1} C_o x(t) + (I + D_o)^{-1} D_o r(t) \quad (4.58)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_c x(t) + D_c r(t) \quad (4.59)$$

hvor $C_c = (I + D_o)^{-1} C_o$ og $D_c = (I + D_o)^{-1} D_o$. Desuden har vi at:

$$\dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o (r(t) - y(t)) \quad (4.60)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = A_o x(t) + B_o (r(t) - (I + D_o)^{-1} C_o x(t) - (I + D_o)^{-1} D_o r(t)) \quad (4.61)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = (A_o - B_o (I + D_o)^{-1} C_o) x(t) + B_o (I - (I + D_o)^{-1} D_o) r(t) \quad (4.62)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c r(t) \quad (4.63)$$

hvor

$$A_c = A_o - B_o (I + D_o)^{-1} C_o \quad (4.64)$$

$$B_c = B_o (I - (I + D_o)^{-1} D_o) \quad (4.65)$$

$$= B_o ((I + D_o)^{-1} (I + D_o - D_o)) = B_o (I + D_o)^{-1} \quad (4.66)$$

Vi definerer nu det *åben sløjfe karakteristiske polynomium* $\phi_{OL}(s)$:

$$\phi_{OL}(s) = \det(sI - A_o) \quad (4.67)$$

og det *lukket sløjfe karakteristiske polynomium* $\phi_{CL}(s)$:

$$\phi_{CL}(s) = \det(sI - A_c) \quad (4.68)$$

Som beskrevet i Afsnit 4.1.2 er stabiliteten af lukketsløjfe systemet bestemt af nulpunkterne i det karakteristiske polynomium $\phi_{CL}(s)$. For at nå frem til et "Nyquist-lignende" udtryk ønsker vi at udtrykke $\phi_{CL}(s)$ ved hjælp af åben sløjfen $G(s)K(s)$.

Til dette formål definerer vi *retur differensen* $F(s)$ som

$$F(s) = I + G(s)K(s) \quad (4.69)$$

Vi får desuden brug for fig. lemma, som vi præsenterer uden bevis

Lemma 4.1 (Schurs formel for opdelt determinanter) Lad en kvadratisk matrix P være opdelt som

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Så kan determinanten for P udtrykkes som

$$\det P = \det P_{11} \det(P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12}), \quad \text{hvis } \det P_{11} \neq 0 \quad (4.71)$$

eller

$$\det P = \det P_{22} \det(P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{21}), \quad \text{hvis } \det P_{22} \neq 0 \quad (4.72)$$

Opskriv nu determinanten for retur differensen $F(s)$ som

$$\det F(s) = \det(I + C_o(sI - A_o)^{-1}B_o + D_o) \quad (4.73)$$

Med variabelsubstitutionerne

$$P_{11} = sI - A_o \quad P_{12} = -C_o \quad (4.74)$$

$$P_{21} = B_o \quad P_{22} = I + D_o \quad (4.75)$$

svarer højresiden af (4.73) til det sidste led i højresiden af (4.71). Hvis vi multiplicerer med $\det P_{11} = \det(sI - A_o)$ fås derfor

$$\det(sI - A_o) \det(I + D_o + C_o(sI - A_o)^{-1}B_o) = \det \left(\begin{bmatrix} sI - A_o & B_o \\ -C_o & I + D_o \end{bmatrix} \right) \quad (4.76)$$

$$\Leftrightarrow \det F(s) = \frac{1}{\det(sI - A_o)} \det \left(\begin{bmatrix} sI - A_o & B_o \\ -C_o & I + D_o \end{bmatrix} \right) \quad (4.77)$$

Ved atter at anvende Schurs formel kan vi desuden vise at

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_r & -B_o(I + D_o)^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \right) = \det I_r \det (I_n + 0I_r B_o(I + D_o)^{-1}) \quad (4.78)$$

$$= \det I_r \det I_n = 1 \quad (4.79)$$

Ved at kombinere Formel (4.79) med (4.77) fås

$$\det F(s) = \frac{1}{\det(sI - A_o)} \det \left(\begin{bmatrix} I_r & -B_o(I + D_o)^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} sI - A_o & B_o \\ -C_o & I + D_o \end{bmatrix} \right) \quad (4.80)$$

$$\Rightarrow \det F(s) = \frac{1}{\det(sI - A_o)} \det \left(\begin{bmatrix} sI - A_o + B_o(I + D_o)^{-1}C_o & 0 \\ -C_o & I + D_o \end{bmatrix} \right) \quad (4.81)$$

$$\Rightarrow \det F(s) = \frac{1}{\det(sI - A_o)} \det(sI - A_c) \det(I + D_o + c_o(sI - A_c)^{-1}0) \quad (4.82)$$

$$\Leftrightarrow \det F(s) = \frac{1}{\det(sI - A_o)} \det(sI - A_c) \det(I + D_o) \quad (4.83)$$

Da $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = I + D_o$ fås endelig at

$$\det F(s) = \frac{\phi_{CL}}{\phi_{OL}} \det F(\infty) \quad (4.84)$$

$$\Leftrightarrow \phi_{CL} = \frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} \phi_{OL} \quad (4.85)$$

Nu har vi udtrykt det lukket sløjfe karakteristiske polynomium ϕ_{CL} ved hjælp af retur differensen $F(s)$ samt det åben sløjfe karakteristiske polynomium ϕ_{OL} . Bemærk, at $\det F(\infty)$ blot er en konstant skaleringsfaktor. For fysiske systemer er åben sløjfen som oftest strengt ægte, og så er $\det F(\infty) = 1$. Vi kan nu relatere nulpunkterne for $\det F(s)$ til polerne i henholdsvis åben og lukket sløjfe systemet. Af Formel (4.84) ses det at

- Lukket sløjfe poler (dvs. nulpunkter for ϕ_{CL}) optræder som nulpunkter i $\det F(s)$.
- Åben sløjfe poler (dvs. nulpunkter for ϕ_{OL}) optræder som poler i $\det F(s)$.

Antag nu at $\det F(s)$ har n_p poler og n_z nulpunkter i højre halvplan. På præcis samme vis som for SISO systemer har vi da ud fra *argument princippet* at:

$$\Delta \arg \det F(s) = -2\pi(n_z - n_p) \quad (4.86)$$

hvor $\Delta \arg$ angiver ændringen i vinkelen (argumentet) af $\det F(s)$ når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen² således at $\Delta \arg / (2\pi)$ angiver antal omkransninger omkring origo mod uret.

Hvis lukket sløjfen skal være stabil må vi således have at $n_z = 0$, da n_z jo angiver antallet af RHP poler i lukket sløjfen. Ergo:

$$n_z = 0 \Rightarrow \Delta \arg \det F(s) = 2\pi n_p \quad (4.87)$$

Dette leder os nu frem til den generaliserede Nyquist Sætning:

Sætning 4.2 (Generaliserede Nyquist sætning I) *Hvis åben sløjfe overføringsmatricen $G(s)K(s)$ har n_p poler i højre halvplan så er systemet internt stabilt hvis og kun hvis Nyquist billedkurven af $\det F(s) = \det(I + G(s)K(s))$ omkranser origo n_p gange mod uret, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen, idet det forudsættes at der ikke er forekommet nogle RHP pol-nulpunkts forkortelser i produktet $G(s)K(s)$.*

Et ækvivalent stabilitetskriterium kan udledes ved hjælp af *karakteristiske loci*. Hvis $\lambda_i(\omega)$ er en egenverdi af $G(j\omega)K(j\omega)$, så er de karakteristiske loci for $G(s)K(s)$ defineret som graferne $\lambda_i(\omega)$ for $1 \leq i \leq n$, hvor n er størrelsen af produktet $G(s)K(s)$, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen. Da determinanten af en matrix X er lig med produktet af egenverdier for X har vi da:

$$\Delta \arg \det(I + G(s)K(s)) = \Delta \arg \prod_i \lambda_i(I + G(j\omega)K(j\omega)) \quad (4.88)$$

$$= \Delta \arg \prod_i (1 + \lambda_i(G(j\omega)K(j\omega))) \quad (4.89)$$

$$= \sum_i \Delta \arg(1 + \lambda_i(G(j\omega)K(j\omega))) \quad (4.90)$$

²Nyquist \mathcal{D} konturen går op ad den imaginære akse fra origo til uendelig, og derefter langs en halvcirkel i den højre halvplan indtil den møder den negative imaginære akse og endelig op til origo. Hvis konturen møder poler på den imaginære akse indrykkes den således at disse poler udelades.

Da antallet af omkransninger for $(1 + \lambda_i(G(j\omega)K(j\omega)))$ om origo er lig med antallet af omkransninger for $\lambda_i(G(j\omega)K(j\omega))$ om Nyquist punktet $(-1 + 0j)$ kan vi nu formulere et ækvivalent Nyquist stabilitetskriterium:

Sætning 4.3 (Generaliserede Nyquist sætning II) *Hvis åben sløjfe overføringsmatricen $G(s)K(s)$ har n_p poler i højre halvplan så er systemet internt stabilt hvis og kun hvis de karakteristiske loci for $G(s)K(s)$ omkranser Nyquist punktet, $(-1 + 0j)$, n_p gange mod uret, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen, idet det forudsættes at der ikke er forekommet nogle RHP pol-nulpunkts forkortelser i produktet $G(s)K(s)$.*

Bemærk at de to Nyquist sætninger udtaler sig om *intern* stabilitet af lukket sløjfen, dvs. om stabiliteten af samtlige overføringsmatricer i Formel (4.52). Dette skyldes at åben sløjfen for de 4 systemer er den samme, nemlig $G(s)K(s)$.

4.3 Frekvensrespons af flervariable systemer

Frekvensresponsanalyse spiller en central rolle i såvel klassisk SISO regulering som moderne flervariable robust regulering. For enkeltvariable systemer er frekvensresponsen for en overføringsfunktion $G(s)$ naturligt givet som den absolutte værdi samt vinkeldrejningen af den komplekse variable $G(j\omega)$ for $0 \leq \omega \leq \infty$. For flervariable systemer er $G(j\omega)$ jo imidlertid en kompleks matrix, så følgende spørgsmål melder sig: hvordan karakteriserer vi den absolutte værdi (forstærkningen) af en kompleks matrix med en skalar værdi?

Da vi anvender egenverdier i den generaliserede Nyquist Sætning er det umiddelbart fristende at bruge *spektral radius*:

$$\rho(G(j\omega)) = \max_i |\lambda_i(G(j\omega))| \quad (4.91)$$

som mål for forstærkningen af $G(j\omega)$. Imidlertid viser det sig, at egenverdier ikke nødvendigvis giver et godt billede af forstærkningen af en overføringsmatrix. Istedet vil vi udvide normbegrebet introduceret i Kapitel 3 til vektorer og matricer.

4.3.1 Vektornormer

Hvis $x \in \mathbf{C}^n$ er en n -dimensional kompleks vektor definerer vi Hölder eller p -normen af x som

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (4.92)$$

Inden for reguleringsteori er det hovedsageligt 1-, 2- og ∞ -normen, som er vigtige, idet de har en fornuftig fysisk mening:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{absolut sum} \quad (4.93)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x^*x} \quad \text{Euklidisk længde} \quad (4.94)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad \text{max. absolut værdi} \quad (4.95)$$

I Formel (4.95) står x^* for den komplekse konjugerede transponerede af x . Læg desuden mærke til at 2-normen $\|x\|_2$ er den sædvanlige Euklidiske længde af den komplekse vektor x .

4.3.2 Inducerede normer

Vi kan nu definere matrix p -normer ud fra de tilsvarende vektor p -normer. Lad $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ være en $m \times n$ dimensional kompleks matrix. Så er p -normen for A defineret som:

$$\|A\|_p = \sup_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad \forall A \in \mathbf{C}^{m \times n} \quad (4.96)$$

Vi siger at matrix p -normen er en *induceret norm*; den er induceret af den tilsvarende vektor p -norm. Man kan fortolke $\|A\|_p$ som den maximale forstærkning af matricen A målt ved p -norm forholdet mellem vektorer før og efter multiplikation med A . Generelt er det vanskeligt at udregne matrix-normer, men for $p = 1, 2, \infty$ eksisterer der ret simple algoritmer til at bestemme $\|A\|_p$. For $A = [a_{ij}] \in \mathbf{C}^{m \times n}$ kan det vises at:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad \text{max. søjle sum} \quad (4.97)$$

$$\|A\|_2 = \max_i \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad \text{største singularværdi - se nedenfor} \quad (4.98)$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{max. række sum} \quad (4.99)$$

4.3.3 Singularværdier

Vi kan nu anvende de ovenfor definerede matrix-normer som mål for forstærkningen af vores frekvensrespons $G(j\omega)$. Betragt input-output relationen

$$y = G(j\omega)u \quad (4.100)$$

Vi vil altså beskrive forstærkningen af frekvensresponsen $G(j\omega)$ som størrelsesforholdet mellem outputtet y og inputtet u målt med vektor p -normen. Det lader jo til at være en rimelig måde at måle forstærkningen på. Problemet er, at enhver norm $\|G(j\omega)u\|_p$ er afhængig ikke bare af størrelsen af inputtet $\|u\|_p$, men også af inputvektorens *retning*. Dette forhold er en af de fundamentale forskelle imellem SISO og MIMO systemer, idet inputtet for SISO systemer jo er en skalar. Når vi bruger matrix p -normen til at evaluere frekvensresponsen $G(j\omega)$ finder vi *den maksimale forstærkning af $G(j\omega)$, for alle retninger af inputvektoren u* . Det vil sige, at vi opnår en øvre grænse for forstærkningen af $G(j\omega)$.

Både 1-, 2- og ∞ -normen har potentiel anvendelse inden for reguleringsteknik. Imidlertid er det teoretiske fundament kun rigtig veludviklet for 2-normen, selvom der for tiden forskes intenst i anvendelsen af de to andre normer. Ergo, lad os evaluere frekvensresponsen for $G(s)$ ved

$$\|G(j\omega)\|_2 = \sup_{u \in \mathbf{C}^n, u \neq 0} \frac{\|G(j\omega)u\|_2}{\|u\|_2} = \max_i \sqrt{\lambda_i(G^*(j\omega)G(j\omega))} \quad (4.101)$$

$\max_i \sqrt{\lambda_i(G^*(j\omega)G(j\omega))}$ er også kendt som den maksimale singularværdi $\bar{\sigma}(G(j\omega))$. Hvis vi nu lader ω variere fra 0 til ∞ kan vi beregne matrix 2-normen af $G(j\omega)$ for alle værdier af ω .

Dette vil give os en frekvensafhængig øvre grænse for forstærkningen af overføringsmatricen $G(s)$. Imidlertid vil vi også gerne have en nedre grænse for forstærkningen. Denne nedre grænse er givet ved den *mindste singularværdi*³ defineret som

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) = \inf_{u \in \mathbf{C}^n, u \neq 0} \frac{\|G(j\omega)u(j\omega)\|_2}{\|u(j\omega)\|_2} \quad (4.102)$$

Lad os lige rekapitulere:

Hvis vi måler forstærkningen af en overføringsmatrix $G(s)$ som forholdet mellem 2-normen af outputtet y og inputtet u så vil den største og mindste singularværdi af $G(j\omega)$ bestemme en øvre og nedre grænse for denne forstærkning.

Vi kan rent faktisk være endnu mere specifikke i vores analyse af forstærkningen for $G(s)$, nemlig ved hjælp af en *singularværdi dekomposition* af $G(j\omega)$. Lad os imidlertid lige først introducere følgende lemma som definerer singularværdierne for en kompleks matrix A .

Lemma 4.2 (Singularværdier og egenværdier) *Singularværdierne for en kompleks matrix $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, kaldet $\sigma_i(A)$, er lig med de k største (ikke-negative) kvadratrødder af egenværdierne af A^*A , hvor $k = \min n, m$. Ergo*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.103)$$

Normalt ordnes singularværdierne således at $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$.

Vi har altså at:

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A) = \sup_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2 \quad (4.104)$$

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_k(A) = \inf_{x \in \mathbf{C}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (4.105)$$

Forholdet mellem største og mindste singularværdi kaldes for konditionstallet κ :

$$\kappa(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)} \quad (4.106)$$

Lad os herefter introducere singularværdi dekompositionen af en kompleks matrix A :

Lemma 4.3 (Singular værdi opspaltning) *Lad $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$ være en kompleks matrix. Så eksisterer der to unitære⁴ matrixer $U \in \mathbf{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbf{C}^{n \times n}$ og en diagonal matrix $\Sigma \in \mathbf{R}^{m \times n}$ således at:*

$$A = U\Sigma V^* \quad (4.107)$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

$$= \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^* \quad (4.109)$$

³dog kun hvis $G(s)$ har mindst lige så mange rækker som søjler, ellers er den mindste forstærkning altid 0

⁴En unitær matrix U opfylder ligningen $U^*U = I$.

hvor

$$\begin{aligned}\Sigma_k & : \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k). \\ u_1 \rightarrow u_m & : m \text{ søjler af } U. \\ v_1^* \rightarrow v_n^* & : n \text{ rækker af } V^*\end{aligned}$$

Dette kaldes *singulærværdi opspaltningen (SVD) af matricen A*.

Singulærværdi opspaltningen af en reel matrix A kan fortolkes som følger. Enhver reel matrix A mapper geometrisk en enheds-radius hyper-sphere til en hyper-ellipsoide. Singulærværdierne $\sigma_i(A)$ angiver længderne af ellipsens hovedakser. *Singulærvektorene* u_i giver de indbyrdes orthogonale retninger af disse hovedakser og singulærvektorene v_i mapper til u_i vektorene med forstærkning σ_i , altså, $Av_i = \sigma_i u_i$.

Eksempel 4.3 (SVD af en reel matrix)

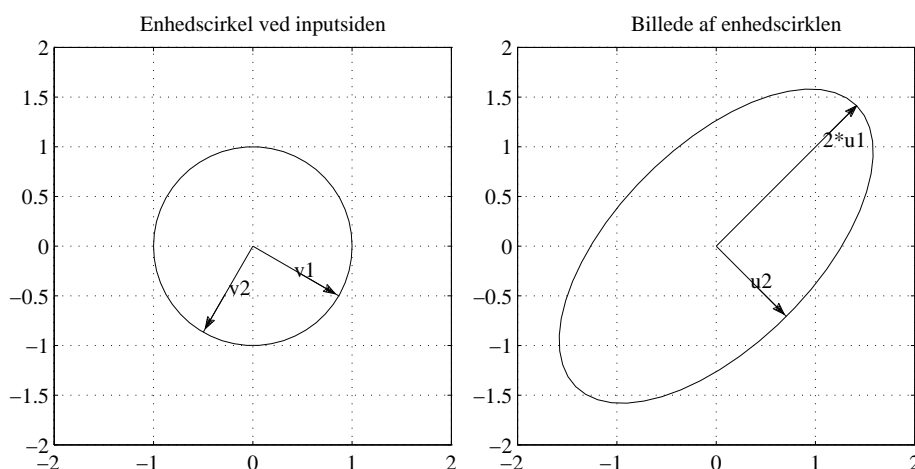
Dette eksempel er taget fra [MZ89]. Lad A være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 0.8712 & -1.3195 \\ 1.5783 & -0.0947 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Singulærværdi opspaltningen af A er givet som $A = U\Sigma V^*$ med:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

En geometrisk fortolkning er givet i Figur 4.3 med $V = [v_1, v_2]$ and $U = [u_1, u_2]$.



Figur 4.3: Singulærværdi opspaltning af en reel matrix.

I det følgende er nogle af de vigtige egenskaber for singulærværdier givet:

$$\bar{\sigma}(A) = \sup_{u \in \mathbb{C}^n, u \neq 0} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} \quad (4.112)$$

$$\underline{\sigma}(A) = \inf_{u \in \mathbb{C}^n, u \neq 0} \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} \quad (4.113)$$

$$\underline{\sigma}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \bar{\sigma}(A) \quad (4.114)$$

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})} \quad (4.115)$$

$$\underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})} \quad (4.116)$$

$$\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha| \bar{\sigma}(A) \quad (4.117)$$

$$\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (4.118)$$

$$\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \quad (4.119)$$

$$\max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \leq \bar{\sigma}([A \ B]) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(A), \bar{\sigma}(B)\} \quad (4.120)$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \text{tr} \{A^* A\} \quad (4.121)$$

hvor

- $\lambda_i(A)$: Den i 'te egen værdi af A .
- Egenskab (4.115) og (4.116) : Forudsætter eksistensen af G^{-1} .
- α : En konstant (kompleks) skalar.
- $\text{tr} \{A^* A\}$: Sporet af $A^* A$.

Betragt nu atter input-output relationen:

$$y = G(j\omega)u \quad (4.122)$$

Ved hjælp af Formel (4.109) på side 39 kan vi formulere dette som

$$y = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^* u \quad (4.123)$$

Da V er unitær vil v_i^* og v_j være ortogonale således at $v_i^* v_j = 0$, for $i \neq j$ og $v_i^* v_i = 1$. Antag nu at $u = \alpha v_j$. Input/output ligningen bliver da:

$$y = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^* v_j \alpha \quad (4.124)$$

$$= \sigma_j \alpha u_j \quad (4.125)$$

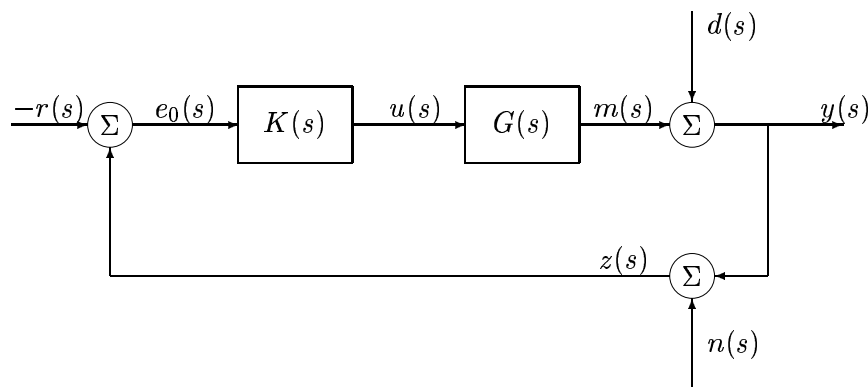
Dette illustrerer, at hvis input vektoren u er i retning af v_j så vil forstærkningen i systemet være præcis σ_j og output vektoren y er præcis i retning af u_j . Vektorsættene $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ og $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ er ikke overraskende kendt som *input* henholdsvis *output hovedretninger*. Singulærværdierne σ_i er også kendt som *hovedforstærkningerne* (directional gains) for system matrixen $G(s)$.

Ergo, hvis $G(s)$ er en overføringsmatrix, kan vi plote singulærværdierne $\sigma_i(G(j\omega))$ for $i = 1, \dots, k$ som funktion af frekvensen ω . Disse kurver er den flervariable generalisering af Bode amplitude kurven for SISO systemer. For flervariable systemer afhænger forstærkningen af et input vektor sinus-signal $ue^{j\omega t}$ af retningen af den komplekse vektor u som illustreret overfor. Forstærkningen er mindst $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ og maksimalt $\bar{\sigma}(G(j\omega))$. Konditionstallet $\kappa(G(j\omega))$, se (4.106) på side 39, plottet imod frekvensen ω illustrerer systemets forstærkningsfølsomhed overfor retningen af inputvektoren u . Hvis $\kappa(G(j\omega)) \gg 1$ vil forstærkningen af systemet være meget afhængig af inputvektorens retning og man siger at $G(s)$ er dårligt konditioneret (ill-conditioned). Modsat, hvis $\kappa(G(j\omega)) \approx 1, \forall \omega \geq 0$, vil forstærkningen af systemet være insensitiv overfor inputvektorens retning og systemet siges at være godt konditioneret (well-conditioned). Et godt konditioneret flervariable system opfører sig i hovedtrækkene som et SISO system og reguleringsdesign for sådanne systemer er forholdsvis ligetil. For dårligt konditionerede systemer må man til gengæld være meget mere omhyggelig ved design og analyse.

Kapitel 5

Robusthedsanalyse af flervariable systemer

I dette kapitel vil vi analysere stabilitet og ydeevne af flervariable systemer med usikkerhed. Vi vil betragte et generelt flervariabelt system som skitseret i Figur 5.1. Alle signaler er således generelt vektorer og $G(s)$ og $K(s)$ overføringsmatricer. $d(s)$ er en outputforstyrrelse og $n(s)$ repræsenterer målestøj. Vi har set bort fra forstyrrelser på inputtet $u(s)$, men dette kan ligeledes inddrages om nødvendigt. I afsnit 5.1.2 formuleres ydeevneproblemet som et 2×2 problem. For at lette omskrivningen anvendes en fortegnskonvention, så det minus der normalt indgår i sløjfen inkluderes i regulatoren $K(s)$. Fejlen defineres som $e(s) = y(s) - r(s)$ og kan på grund af målestøj ikke ses direkte på blokdiagrammet



Figur 5.1: *Generel feedback konfiguration.*

Generelt er der 4 mål vi gerne vil opfylde ved design af regulatoren $K(s)$:

- Nominel lukket sløjfe stabilitet.
- Nominel ydeevne.
- Robust stabilitet.
- Robust ydeevne.

Robust stabilitet betyder at systemet er stabilt ikke bare for det nominelle system $G(s)$, men også for en familie af modeller \mathcal{G} , der omfatter de mulige procesmodeller $G_{\Delta}(s)$ under vores antagelser om modelusikkerhed. Det er imidlertid klart, at den nominelle ydeevne kan forringes voldsomt inden at direkte ustabilitet indtræder. Derfor vil vi også gerne kræve, at lukket sløjfen har robust ydeevne, dvs. at vores ydeevnekrav er opfyldt for alle $G_{\Delta}(s) \in \mathcal{G}$.

Nominal stabilitet af MIMO systemer blev behandlet i Kapitel 4, hvor vi udledte den generaliserede Nyquist Sætning. Vi vil nu betragte kravet om nominal ydeevne.

5.1 Nominal ydeevne

Ud fra Figur 5.1 kan det nemt vises, at

$$y(s) = T_o(s)(n(s) - r(s)) + S_o(s)d(s) \quad (5.1)$$

$$e_0(s) = S_o(s)(n(s) + d(s) - r(s)) \quad (5.2)$$

$$e(s) = y(s) - r(s) = S_o(s)(d(s) - r(s)) + T_o(s)n(s) \quad (5.3)$$

$$u(s) = M_o(s)(n(s) + d(s) - r(s)) \quad (5.4)$$

hvor

$$T_o(s) = (I - G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) = G(s)K(s)(I - G(s)K(s))^{-1} \quad (5.5)$$

$$S_o(s) = (I - G(s)K(s))^{-1} \quad (5.6)$$

$$M_o(s) = K(s)(I - G(s)K(s))^{-1} = (I - K(s)G(s))^{-1}K(s) \quad (5.7)$$

er henholdsvis den komplementære sensitivitet, sensitiviteten samt kontrol sensitiviteten. Vi har anvendt subscript $(\cdot)_o$ for at understrege, at disse sensitivitetsfunktioner alle er udledt ved at åbne sløjfen ved outputtet $y(s)$. Fordi matrix multiplikation ikke er kommutativ må vi skelne mellem om sensitivitetsfunktioner evalueret ved inputtet $u(s)$ eller ved outputtet $y(s)$. Sensitivitetsfunktionerne evalueret ved inputtet $u(s)$ er givet ved

$$T_i(s) = K(s)G(s)(I - K(s)G(s))^{-1} = (I - K(s)G(s))^{-1}K(s)G(s) \quad (5.8)$$

$$S_i(s) = (I - K(s)G(s))^{-1} \quad (5.9)$$

$$M_i(s) = (I - K(s)G(s))^{-1}K(s) \quad (5.10)$$

Bemærk at $M_i(s) = M_o(s) = M(s)$, hvorfor kontrol sensitiviteten er uafhængig af hvorvidt sløjfen brydes ved systemets input eller output. Input sensitiviteterne er ikke så relevante ved ydeevne analyse, men deres betydning bliver klar, når vi senere i Afsnit 5.2 ser på robust stabilitet.

Lad nu $v(s) = d(s) - r(s)$ betegne den "generiske" eksterne forstyrrelse. Da kan vi fra Formel (5.1)-(5.4) gøre følgende observationer:

- For god forstyrrelsesundertrykkelse, dvs. for at $v(s)$ skal påvirke $e(s)$ mindst muligt, viser Formel (5.3), at output sensitiviteten $S_o(s)$ skal være lille.
- For god undertrykkelse af målestøj, dvs. for at $n(s)$ skal påvirke $e(s)$ mindst muligt, viser Formel (5.3), at den komplementære sensitivitet $T_o(s)$ skal være lille.

- For at forstyrrelser $v(s)$ og målestøj $n(s)$ ikke skal slå igennem på inputtet $u(s)$, viser Formel (5.4), at kontrol sensitiviteten $M(s)$ skal være lille.

Vi har imidlertid endnu ikke specificeret hvad vi mener med lille. For at kunne gøre dette fornuftigt vil vi udvide funktions- og overføringsnormerne introduceret Kapitel 3 til flervariable systemer.

5.1.1 Funktionsnormer for flervariable systemer

I Kapitel 3 introducerede vi følgende normer for skalære funktioner $v(t)$:

$$\text{1-normen: } \|v\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt \quad (5.11)$$

$$\text{2-normen: } \|v\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$\infty\text{-normen: } \|v\|_{\infty} = \sup_t |v(t)| \quad (5.13)$$

$$\text{Effekt-normen: } \|v\|_{\mathcal{P}} = \text{pow}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T v^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.14)$$

Effekt-normen $\|v\|_{\mathcal{P}}$ er egentlig ikke en norm, men en semi-norm. Hvis $v(t)$ nu er en vektor istedet for en skalar er effekt-normen defineret som

$$\|v\|_{\mathcal{P}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|v(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

hvor integranden $\|v(t)\|_2$ er vektor 2-normen, som vi introducerede in Afsnit 4.3.1 på side 37:

$$\|v(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i(t)|^2} = \sqrt{v^T(t)v(t)} \quad (5.16)$$

Her er $v^T(t)$ den transponerede af $v(t)$. Bemærk, at vi bruger notationen $\|v\|$ for en funktionsnorm på funktionen $v(t)$ og notationen $\|v(t)\|$ for en vektornorm på funktionsværdien til tidspunktet t . Foruden vektor 2-normen introducerede vi i Afsnit 4.3.1 på side 37 også vektor 1- og ∞ -normen:

$$\text{1-normen: } \|v(t)\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i(t)| \quad (5.17)$$

$$\infty\text{-normen: } \|v(t)\|_{\infty} = \max_i |v_i(t)| \quad (5.18)$$

Vi kan nu kombinere de skalære 1, 2, ∞ functionsnormer med vektor 1, 2, ∞ normerne til i alt 9 forskellige flervariabelte funktionsnormer:

$$\|v\|_{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_1 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |v_i(t)| dt \quad (5.19)$$

$$\|v\|_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{v^T(t)v(t)} dt \quad (5.20)$$

$$\|v\|_{1,\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_{\infty} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \max_i |v_i(t)| dt \quad (5.21)$$

$$\|v\|_{2,1} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_1^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n |v_i(t)| \right)^2 dt} \quad (5.22)$$

$$\|v\|_{2,2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} v^T(t)v(t) dt} \quad (5.23)$$

$$\|v\|_{2,\infty} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|v(t)\|_{\infty}^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\max_i |v_i(t)| \right)^2 dt} \quad (5.24)$$

$$\|v\|_{\infty,1} = \sup_t \|v(t)\|_1 = \sup_t \sum_{i=1}^n |v_i(t)| \quad (5.25)$$

$$\|v\|_{\infty,2} = \sup_t \|v(t)\|_2 = \sup_t \sqrt{v^T(t)v(t)} \quad (5.26)$$

$$\|v\|_{\infty,\infty} = \sup_t \|v(t)\|_{\infty} = \sup_t \max_i |v_i(t)| \quad (5.27)$$

$\|v\|_{x,y}$ betegner således den norm vi får ved at bruge vektor y -normen til hvert tidspunkt t og signalnormen $\|\cdot\|_x$ over tiden.

Vi kan nu bruge disse signalnormer sammen med effekt-normen $\|v\|_{\mathcal{P}}$ til at definere inducerede normer for flervariabelte overføringsfunktioner. Lad $g(t)$ være impulsresponsmatricen associeret med overføringsmatricen $G(s)$. Da er outputtet $y(t)$ givet som:

$$y(t) = g(t) * u(t) \quad (5.28)$$

hvor $g(t) * u(t)$ angiver foldningsintegralet af $g(t)$ og $u(t)$. Vi kan nu definere en induceret norm for $g(t)$, nemlig som:

$$\|g(t)\|_{(u_x, u_y) \rightarrow (y_x, y_y)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_{y_x, y_y}}{\|u\|_{u_x, u_y}} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|g * u\|_{y_x, y_y}}{\|u\|_{u_x, u_y}} \quad (5.29)$$

hvor u_x, u_y, y_x, y_y er ved en vilkårlig kombination af 1, 2, ∞ og \mathcal{P} . Den inducerede norm $\|g(t)\|_{(u_x, u_y) \rightarrow (y_x, y_y)}$ måler således den maximale "forstærkning" af systemet når inputtet måles med normen $\|u\|_{u_x, u_y}$ og outputtet måles med normen $\|y\|_{y_x, y_y}$. På denne måde kan vi definere mere end hundrede forskellige inducerede normer på $g(t)$. Groft sagt er der mere end hundrede forskellige måder at måle et flervariabelt systems forstærkning på, selv om kun få af disse har praktisk betydning.

Eksempel 5.1 (Nominel ydeevne)

Lad os betragte et reguleringssystem hvor formålet er at begrænse forbruget af et bestemt resource. Ergo vil det være rimeligt at måle reguleringsfejlen $e(t)$ ved normen $\|e\|_{1,1}$. Antag at

forstyrrelserne $d(t)$ på systemet fornuftigt kan beskrives ved deres energindhold. Da vil $\|d\|_{2,2}$ være et godt mål for $d(t)$. Det betyder nu, at den forstærkning i systemet, der vil være relevant at minimere er:

$$\|s\|_{(1,1) \rightarrow (2,2)} = \sup_{d \neq 0} \frac{\|e\|_{1,1}}{\|d\|_{2,2}} \quad (5.30)$$

hvor $s(t)$ er impulsresponsmatricen for overføringsfunktionen $S(s)$ fra $d(s)$ til $e(s)$.

Det kan umiddelbart virke helt uoverskueligt med alle disse inducerede normer. Det kan da også vises, at adskillige af dem er enten lig med 0 eller uendeligt og derfor uden praktisk interesse. Der forskes for tiden intensivt i at udvikle designmetoder til mange af de ovennævnte normer.

Inden for "klassisk" robust regulering har man imidlertid udelukkende koncentreret sig om en eneste induceret norm, nemlig den rene 2-norm, dvs. normen induceret af $\|\cdot\|_{2,2}$ på $\|\cdot\|_{2,2}$:

$$\|g\|_{(2,2) \rightarrow (2,2)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|g * u\|_{2,2}}{\|u\|_{2,2}} = \sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} y^T(t)y(t)dt}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^T(t)u(t)dt}} \quad (5.31)$$

Da $\|\cdot\|_{2,2}$ normen måler energien i signalet repræsenterer $\|g\|_{(2,2) \rightarrow (2,2)}$ et systems størst mulige forøgelse af signalenergi. Grunden til at man specielt har interesseret sig for denne norm er dels, at den er praktisk anvendelig i de fleste tilfælde og dels, at den fører frem til simple betingelser både for robust stabilitet og for nominal ydeevne.

En vigtig egenskab ved $\|\cdot\|_{2,2}$ fås via Parseval's sætning:

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^T(t)u(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(j\omega)u(j\omega)d\omega} \quad (5.32)$$

hvor $u(j\omega)$ er den Laplacetransformerede af $u(t)$. Derfor har vi også

$$\|g\|_{(2,2) \rightarrow (2,2)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|g * u\|_{2,2}}{\|u\|_{2,2}} \quad (5.33)$$

$$= \sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y^*(j\omega)y(j\omega)d\omega}}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(j\omega)u(j\omega)d\omega}} \quad (5.34)$$

$$= \sup_{u \neq 0} \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u(j\omega)^* G(j\omega)^* G(j\omega) u(j\omega) d\omega}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^*(j\omega) u(j\omega) d\omega}} \quad (5.35)$$

$$= \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (5.36)$$

$$= \|G\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \quad (5.37)$$

Lad os rekapitulere:

Lad et flervariabelt system være beskrevet af overføringsmatricen $G(s)$. Hvis vi måler systemets input $u(t)$ og output $y(t)$ ved 2-normen $\|\cdot\|_{2,2}$ er systemets maksimale

forstærkning givet ved \mathcal{H}_∞ normen af $G(s)$:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_{2,2}}{\|u\|_{2,2}} \quad (5.38)$$

Vi siger at \mathcal{H}_∞ normen er induceret af 2-normen for signaler.

Vi kan altså bruge singularværdibegrebet introduceret i Kapitel 4 til at vurdere \mathcal{H}_∞ normen af en overføringsmatrix. Hvis vi plotter $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ over frekvens er $\|G\|_{\mathcal{H}_\infty}$ givet som den maksimale værdi.

Hvis vi nu vender tilbage til vores ydeevne observationer på side 43 kunne man være fristet til for god forstyrrelsesundertrykkelse at formulere flg. krav:

$$\bar{\sigma}(S_o(j\omega)) \ll 1 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.39)$$

Ligeledes kunne man for god undertrykkelse af målestøj kræve at:

$$\bar{\sigma}(T_o(j\omega)) \ll 1 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.40)$$

og for at $v(s)$ og $n(s)$ ikke skal slå igennem på $u(s)$, kunne kræves at:

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) \ll 1 \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.41)$$

Da

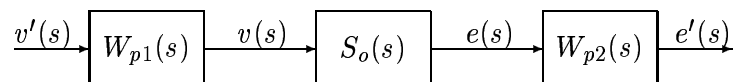
$$S_o(j\omega) - T_o(j\omega) = I$$

kan den komplementære sensitivitet $T_o(j\omega)$ og sensitiviteten $S_o(j\omega)$ imidlertid ikke begge være små i det samme frekvensområde. Ergo kan vi ikke opnå optimal forstyrrelsesundertrykkelse og dæmpning af målestøj i det samme frekvensområde. Dette er et velkendt resultat fra klassisk regulering. Heldigvis er forstyrrelser $v(s)$ normalt koncentreret i det lavfrekvente område, mens målestøj som oftest ligger i det højfrekvente område. Ergo kan vi forme den komplementære sensitivitet $T_o(j\omega)$ og sensitiviteten $S_o(j\omega)$ således at $\bar{\sigma}(S_o(j\omega))$ er lille for lave frekvenser og $\bar{\sigma}(T_o(j\omega))$ er lille for høje frekvenser. Generelt vil målestøj begrænse den opnåelige båndbredde af et reguleringssystem. Hvis der er betydelig målestøj under den ønskede båndbredde kan det være nødvendigt at udskifte sensorene med et bedre produkt. I afsnit 5.2 skal vi imidlertid se, at robusthed overfor model usikkerheder også lægger bånd på sensitivitetsfunktionerne.

Ofte vil en ydeevne specifikation være givet som en vægtet sensitivitetsspecifikation:

$$\bar{\sigma}(W_{p2}(j\omega)S_o(j\omega)W_{p1}(j\omega)) \leq 1, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.42)$$

hvor $W_{p1}(s)$ og $W_{p2}(s)$ betegner henholdsvis en input og en output vægt, se Figur 5.2. Det forudsættes at vægtene skaleres sådan at 1 tallet på højresiden af (5.42) giver mening.



Figur 5.2: Nominal ydeevne specifikation. Outputsensitivitet med input vægt $W_{p1}(s)$ og output vægt $W_{p2}(s)$.

Den *normaliserede input vektor* $v'(t)$ antages at tilhøre følgende mængde af normbundne funktioner:

$$\mathcal{D}'_t = \{v'(t) \mid \|v'\|_{2,2}^2 \leq 1\} \quad (5.43)$$

Ergo tilhører den Laplacetransformerede af $v'(t)$ følgende mængde:

$$\mathcal{D}' = \{v'(s) \mid \|v'\|_{2,2}^2 \leq 1\} \quad (5.44)$$

Inputvægten $W_{p1}(s)$ anvendes til at transformere de normaliserede input $v'(s)$ til de fysiske input $v(s)$. De fysiske input antages altså at tilhøre:

$$\mathcal{D} = \left\{ v(s) \mid \left\| W_{p1}^{-1}v \right\|_{2,2}^2 \leq 1 \right\} \quad (5.45)$$

Da frekvensindholdet i v normalt er koncentreret ved lave frekvenser vil $W_{p1}(s)$ som oftest være stor ved lave frekvenser og lille ved høje frekvenser.

Outputvægten $W_{p2}(s)$ anvendes hovedsageligt til at afveje vigtigheden af de enkelte signaler i $e(t)$ samt til evt. at angive det frekvensområde vi vil vægte fejlene i.

\mathcal{H}_∞ normen af $W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)$ er da givet ved

$$\|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{v' \neq 0} \frac{\|e'\|_{2,2}}{\|v'\|_{2,2}} \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow \|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{v' \in \mathcal{D}'} \|e'\|_{2,2} \quad (5.47)$$

$$\Leftrightarrow \|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{v' \in \mathcal{D}'} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e'(t)^T e'(t) dt} \quad (5.48)$$

Ergo vil 2-normen af den normaliserede fejl $\|e'\|_{2,2}$ højst være lig med \mathcal{H}_∞ normen af $W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)$.

Vi kan da opstille et nominelt ydeevne kriterium; nemlig givet vægtfunktionerne $W_{p1}(s)$ og $W_{p2}(s)$, at designe en stabiliserende regulator $K(s)$ således at omkostningsfunktionen

$$\mathcal{J}_{np} = \|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.49)$$

minimeres. Dette kan også formuleres som:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.50)$$

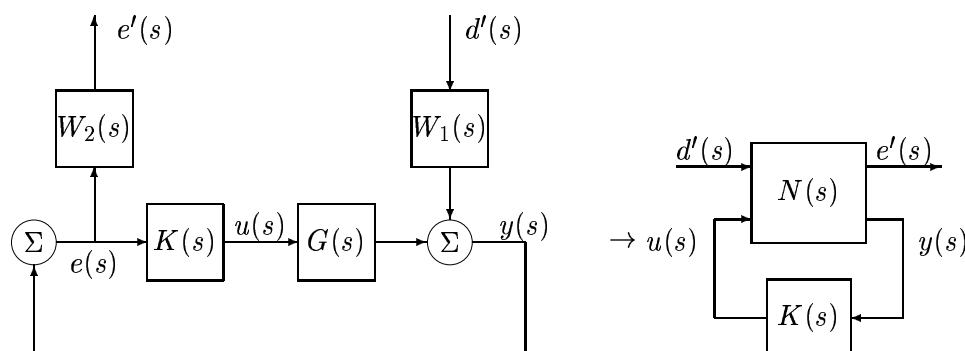
hvor \mathcal{K}_S betegner alle stabiliserende regulatorer. Hvis en stabiliserende regulator kan opnå $\|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$ siger vi at det regulerede system har nominal ydeevne.

5.1.2 2×2 blok problem

En nem måde at formulere nominal ydeevne problemet er ved hjælp af 2×2 blok problemet. I Figur 5.3 er det vist hvorledes $W_{p1}(s)$ og $W_{p2}(s)$ kan inkluderes i lukket sløjfen. Den udvidede lukket sløjfe kan da repræsenteres på såkaldt 2×2 blok form, se Figur 5.3, hvor signalerne $r(s)$, $n(s)$ og $e(s)$ fra Figur 5.1 er udeladt, da kun overføringsfunktionen fra $d'(s)$ til $e'(s)$ medregnes i ydeevne. Hvis referenceændringer eller målestøj ønsket medtaget i ydeevneindekset kan det

gøres analogt, idet man da skal udvide $d'(s)$ vektoren med $r(s)$ og $n(s)$. Det generaliserede system $N(s)$ indeholder foruden det nominelle system $G(s)$ også vægtfunktionerne for nominel ydeevne.

$$N(s) = \begin{bmatrix} W_2(s)W_1(s) & W_2(s)G(s) \\ W_1(s) & G(s) \end{bmatrix} \quad (5.51)$$



Figur 5.3: *Nominal ydeevne problem. Udvidet lukket sløjfe og tilsvarende 2×2 blok form.*

Overføringsfunktionen fra $d'(s)$ til $e'(s)$ er nu givet ved:

$$e'(s) = \left(N_{11}(s) + N_{12}(s)K(s) (I - N_{22}(s)K(s))^{-1} N_{21}(s) \right) d'(s) \quad (5.52)$$

$$= W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)d'(s) \quad (5.53)$$

Idet vi benytter notationen:

$$F_l(N(s), K(s)) = \left(N_{11}(s) + N_{12}(s)K(s) (I - N_{22}(s)K(s))^{-1} N_{21}(s) \right) \quad (5.54)$$

kan vores nominelle ydeevne problem kan skrives:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.55)$$

Dette er et såkaldt standard \mathcal{H}_∞ problem, som kan løses med kendte metoder. Disse metoder vil blive beskrevet i Kapitel 6 på side 61.

5.2 Robust stabilitet

Lad os herefter kigge på robust stabilitet for flervariabel systemer. I begyndelsen af 1980'erne fandt reguleringsteoretikere som f.eks. Doyle & Stein ud af, at robusthed imod umodelleret dynamik kan opnås ved at begrænse nogle af de sensitivitetsfunktioner, vi har introduceret i forrige afsnit. Lad $G(s)$ og $G_\Delta(s)$ beskrive henholdsvis det nominelle og det virkelige (perturberede) system. Vi vil så betragte følgende perturbationsmodeller:

- Additiv usikkerhed: $G_\Delta(s) = G(s) + \tilde{\Delta}(s)$.

- Input multiplikativ usikkerhed: $G_{\Delta}(s) = G(s)(I + \tilde{\Delta}(s))$.
- Output multiplikativ usikkerhed: $G_{\Delta}(s) = (I + \tilde{\Delta}(s))G(s)$.
- Invers input multiplikativ usikkerhed: $G_{\Delta}(s) = G(s)(I + \tilde{\Delta}(s))^{-1}$.
- Invers output multiplikativ usikkerhed: $G_{\Delta}(s) = (I + \tilde{\Delta}(s))^{-1}G(s)$.

I Kapitel 1 betragtede vi lignende usikkerhedsmodeller for skalære systemer og vi begrænsede perturbationen $\tilde{\Delta}(s)$'s størrelse ved den absolutte værdi af frekvensresponsen:

$$|\tilde{\Delta}(j\omega)| \leq \ell(\omega) \quad (5.56)$$

Nu er $\tilde{\Delta}(j\omega)$ imidlertid en matrix. Således må vi bestemme os for hvilken norm vi vil bruge til at begrænse størrelsen af $\tilde{\Delta}(j\omega)$. Inden for moderne robust regulering er der hovedsageligt 2-normen, der anvendes til at begrænse $\tilde{\Delta}(j\omega)$. Det er der to hovedårsager til. For det første er den dertil svarende perturbationsmodel velegnet til beskrivelse af højfrekvent umodellet dynamik, tidsforsinkelser og fænomener hidrørende fra systemer med fordelte parametre. For det andet giver det simple matematiske betingelser for robust stabilitet.

Vi antager således at $\tilde{\Delta}(j\omega)$ er en kompleks matrix; ukendt, men begrænset i amplitude:

$$\|\tilde{\Delta}(j\omega)\|_2 = \bar{\sigma}(\tilde{\Delta}(j\omega)) \leq \ell(\omega), \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.57)$$

Normalt introduceres 2 diagonale vægtmatricer $W_{u1}(s)$ og $W_{u2}(s)$ således at:

$$\tilde{\Delta}(s) = W_{u2}(s)\Delta(s)W_{u1}(s) \quad (5.58)$$

med

$$\|\Delta(j\omega)\|_2 = \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1, \quad \forall \omega \geq 0 \quad (5.59)$$

Input vægten $W_{u1}(s)$ anvendes til skaling, hvis f.eks. signalerne er målt i forskellige enheder. Outputvægten $W_{u2}(s)$ bruges som en frekvensafhængig vægt der tilnærmer $\ell(\omega)$.

5.2.1 Sløjfeforstærkningsætningen

Nu vil vi introducere den berømte *Sløjfeforstærkningsætning (the small gain theorem)* og anvende den i forbindelse med at bestemme betingelser for robust stabilitet med de ovenfor beskrevne usikkerhedsstrukturer. Betragt nu systemet i Figur 5.1 og lad $P(s) = G(s)K(s)$ være en kvadratisk overføringsmatrix. Vi har da:

Sætning 5.1 (Sløjfeforstærkningsætning) *Antag at $P(s)$ er en stabil overføringsmatrix. Så er lukket sløjfen stabil hvis spektralradien $\rho(P(j\omega)) < 1, \forall \omega$.*

Bevis for Sætning 5.1 (Ved modsigelse) Antag at spektralradien $\rho(P(j\omega)) < 1, \forall \omega$ og at lukket sløjfen er ustabil. Ifølge den generaliserede Nyquist sætning medfører ustabilitet at billedkurven for $\det(I + P(s))$ omkranser origo når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen. Da Nyquist \mathcal{D} konturen er

lukket vil billedkurven også være det. Derfor eksisterer der et $\epsilon \in [0, 1]$ samt en frekvens ω^* således at

$$\det(I + \epsilon P(j\omega^*)) = 0 \quad \text{dvs. billedkurven går igennem origo} \quad (5.60)$$

$$\Leftrightarrow \prod_i \lambda_i(I + \epsilon P(j\omega^*)) = 0 \quad (5.61)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \epsilon \lambda_i(P(j\omega^*)) = 0 \quad \text{for et givet } i \quad (5.62)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(P(j\omega^*)) = -\frac{1}{\epsilon} \quad \text{for et givet } i \quad (5.63)$$

$$\Rightarrow |\lambda_i(P(j\omega^*))| \geq 1 \quad \text{for et givet } i \quad (5.64)$$

hvilket er en modsigelse da vi antog at $\rho(P(j\omega)) < 1, \forall \omega$. □

Sløjfeforstærkningsætningen siger, at for et åbent-sløjfe stabilt system er en tilstrækkelig betingelse for lukket sløjfe stabilitet, at åben sløjfe forstærkningen målt ved $\rho(P(j\omega))$ er mindre end 1. Heldigvis er dette kun en (potentiel meget konservativ) tilstrækkelig betingelse for lukket sløjfe stabilitet. Ellers kunne vi ikke opfylde det sædvanlige ydeevnekrav om stor forstærkning i det lavfrekvente område.

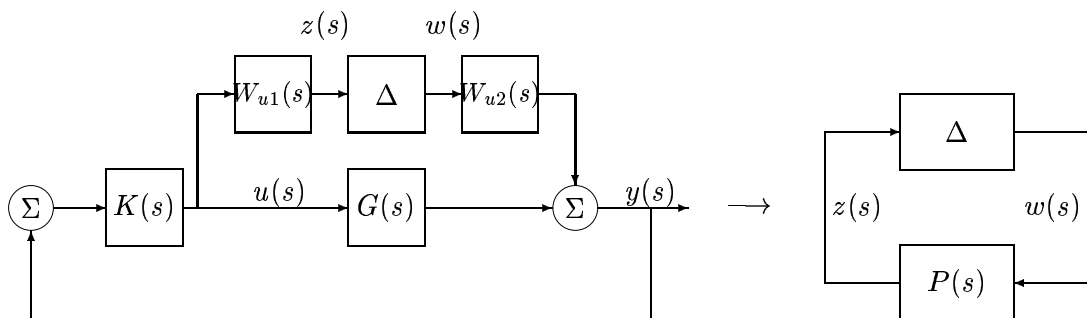
Vi vil nu anvende Sløjfeforstærkningsætningen til at bestemme stabiliteten af lukket sløjfen under de ovenfor givne perturbationsmodeller. Denne applikation af Sløjfeforstærkningsætningen er klassisk i robust reguleringsteori. Lad os f.eks. antage, at det perturberede system kan beskrives ved en additiv perturbation:

$$G_\Delta(s) = G(s) + W_{u2}(s)\Delta(s)W_{u1}(s) \quad (5.65)$$

hvor $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$. Det kan repræsenteres på blokdiagramform som i Figur 5.4. Lad nu $P(s)$ betegne overføringsmatricen "set" fra $\Delta(s)$. Det kan nemt vises at:

$$P(s) = W_{u1}(s)K(s)(I - G(s)K(s))^{-1}W_{u2}(s) \quad (5.66)$$

$$= W_{u1}(s)M(s)W_{u2}(s) \quad (5.67)$$



Figur 5.4: Lukket sløjfe system med additiv perturbation. $P(s)$ er overføringsmatricen set fra $\Delta(s)$.

Vi har da følgende sætning:

Sætning 5.2 (Robust Stabilitet) *Antag at systemet $P(s)$ er stabilt og at perturbationen $\Delta(s)$ er således, at det perturberede lukket sløjfe system er stabilt hvis og kun hvis billedkurven*

af $\det(I - P(s)\Delta(s))$, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen, ikke omkranser origo. Da er lukket sløjfen i Figur 5.4 stabil for alle perturbationer $\Delta(s)$ med $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$ hvis og kun hvis en af de følgende ækvivalente betingelser er opfyldt:

$$\det(I - P(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall \Delta(j\omega) : \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (5.68)$$

$$\Leftrightarrow \rho(P(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega, \forall \Delta(j\omega) : \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1 \quad (5.69)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(P(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \quad (5.70)$$

$$\Leftrightarrow \|P(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.71)$$

Bevis for Sætning 5.2 Antag at der eksisterer en perturbation $\Delta^*(s)$ således, at $\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega)) \leq 1$ og at lukket sløjfe systemet er ustabil. Da vil billedkurven af $\det(I - P(s)\Delta^*(s))$ omkranske origo, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen. Da Nyquist \mathcal{D} konturen er lukket, så er billedkurven for $\det(I - P(s)\Delta^*(s))$ det også. Derfor eksisterer der et $\epsilon \in [0, 1]$ samt en frekvens ω^* således at

$$\det(I - P(j\omega^*)\epsilon\Delta^*(j\omega^*)) = 0 \quad (5.72)$$

Da

$$\bar{\sigma}(\epsilon\Delta^*(j\omega^*)) = \epsilon\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega^*)) \leq 1 \quad (5.73)$$

er $\epsilon\Delta^*(s)$ blot en anden perturbation fra vores mængde af mulige perturbationer, og vi har vist, at hvis lukket sløjfen er ustabil så findes der en perturbation med $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$, for hvilken $\det(I - P(s)\Delta(s)) = 0$. Modsat, hvis der ikke eksisterer en perturbation, for hvilken $\det(I - P(s)\Delta(s)) = 0$, så vil Nyquist billedkurven for $\det(I - P(s)\Delta(s))$ heller ikke omkranske origo. Ergo har vi demonstreret nødvendighed og tilstrækkelighed af betingelsen (5.68).

Tilstrækkeligheden af betingelse (5.69) følger direkte fra Sløjfeforstærkningsætningen. Idet

$$\rho(P(j\omega)\Delta(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(\rho(P(j\omega)\Delta(j\omega))) \leq \bar{\sigma}(P(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(P(j\omega)) \leq \|P(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.74)$$

er både betingelse (5.70) og (5.71) tilstrækkelige for robust stabilitet. For at vise nødvendigheden af (5.69) antag, at der eksisterer en perturbation $\Delta^*(s)$ for hvilken $\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega)) \leq 1$ samt en frekvens ω^* således, at $\rho(P(j\omega^*)\Delta^*(j\omega^*)) = 1$. Så gælder det, at

$$|\lambda_i(P(j\omega^*)\Delta^*(j\omega^*))| = 1 \quad \text{for et givet } i \quad (5.75)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(P(j\omega^*)\Delta^*(j\omega^*)) = e^{j\theta} \quad \text{for et givet } i \quad (5.76)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(P(j\omega^*)e^{-j\theta}\Delta^*(j\omega^*)) = +1 \quad \text{for et givet } i \quad (5.77)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i(P(j\omega^*)\tilde{\Delta}^*(j\omega^*)) = +1 \quad \text{for et givet } i \quad (5.78)$$

hvor $\tilde{\Delta}^*(s)$ er en anden perturbation fra vores mængde og hvor $\rho(P(j\omega^*)\tilde{\Delta}^*(j\omega^*)) = 1$. Ergo er

$$\det(I - P(j\omega^*)\tilde{\Delta}^*(j\omega^*)) = 0 \quad (5.79)$$

og nødvendigheden af betingelse (5.69) er vist.

For at vise nødvendigheden af betingelse (5.70) vil vi vise, at der for hver frekvens ω eksisterer en perturbation $\Delta^*(s)$ for hvilken $\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega)) \leq 1$ således at $\det(I - P(j\omega)\Delta^*(j\omega)) = 0$ hvis $\bar{\sigma}(P(j\omega)) = 1$. Lad nemlig $D = \text{diag}\{1, 0, \dots, 0\}$ og lav en singularærværdi opspaltning af $P(j\omega)$ ved frekvensen ω :

$$P(j\omega) = U\Sigma V^* \quad (5.80)$$

hvor U og V er unitære matricer. Lad derefter $\Delta^*(j\omega) = VDU^*$. Da U og V er unitære er $\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega)) = 1$ således at perturbationen tilhører vores mængde. Vi har nu, at

$$\begin{aligned} \det(I - P(j\omega)\Delta^*(j\omega)) &= \det(I - U\Sigma V^*VDU^*) = \det(I - U\Sigma DU^*) = \\ &= \det(U(I - \Sigma D)U^*) = \det(U) \det(I - \Sigma D) \det(U^*) = \det(I - \Sigma D) = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

idet første række og søjle i $I - \Sigma D$ er nul. Vi har således vist nødvendigheden af betingelse (5.70). Nødvendigheden af (5.71) følger derefter umiddelbart. \square

Sætning 5.2 siger, at hvis $\|P(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1$, så eksisterer der ingen perturbationer $\Delta(s)$ for hvilke $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$ som får billedkurven af $\det(I - P(s)\Delta(s))$ til at omkranse origo, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen. Bemærk, at vi *antager*, at dette er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at opretholde stabilitet. Denne antagelse gælder f.eks. når alle perturbationer $\Delta(s)$ er stabile eller når $G_\Delta(s)$ og $G(s)$ har det samme antal ustabile poler. Denne antagelse er standard inden for robust reguleringsteori.

Bemærk, at \mathcal{H}_∞ -norm betingelsen (5.71) *ikke* er konservativ, når vi begrænser vores usikkerhed ved hjælp af den største singularværdi. Ergo, hvis $\|P(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \geq 1$ eksisterer der en perturbation $\Delta^*(s)$, for hvilken $\bar{\sigma}(\Delta^*(j\omega)) \leq 1$, der vil destabilisere lukketsløjfen. Hvis den virkelige modelusikkerhed er ikke-konservativt repræsenteret ved $\Delta(s)$, så er \mathcal{H}_∞ betingelsen for robust stabilitet heller ikke konservativ.

Lad os nu anvende Sætning 5.2 på det additivt perturberede system vist på Figur 5.4. Vi får da, at det perturberede system er robust stabilt, hvis og kun hvis:

$$\bar{\sigma}(P(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \quad (5.82)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}\left(W_{u1}(j\omega)K(j\omega)(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}W_{u2}(j\omega)\right) < 1 \quad \forall \omega \quad (5.83)$$

$$\Leftrightarrow \bar{\sigma}(W_{u1}(j\omega)M(j\omega)W_{u2}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \quad (5.84)$$

$$\Leftrightarrow \|W_{u1}(j\omega)M(j\omega)W_{u2}(j\omega)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.85)$$

På præcis samme vis som for additiv usikkerhed, kan vi bestemme \mathcal{H}_∞ betingelser for robust stabilitet givet de på side 49 formulerede perturbationsstrukturer. I Tabel 5.1 er disse betingelser givet.

Perturbation	Robust stabilitets krav	Norm begrænsning
Additiv	$M(s)$ lille	$\ W_{u1}(s)M(s)W_{u2}(s)\ _{\mathcal{H}_\infty} < 1$
Input multiplikativ	$T_i(s)$ lille	$\ W_{u1}(s)T_i(s)W_{u2}(s)\ _{\mathcal{H}_\infty} < 1$
Output multiplikativ	$T_o(s)$ lille	$\ W_{u1}(s)T_o(s)W_{u2}(s)\ _{\mathcal{H}_\infty} < 1$
Invers input mult.	$S_i(s)$ lille	$\ W_{u1}(s)S_i(s)W_{u2}(s)\ _{\mathcal{H}_\infty} < 1$
Invers output mult.	$S_o(s)$ lille	$\ W_{u1}(s)S_o(s)W_{u2}(s)\ _{\mathcal{H}_\infty} < 1$

Tabel 5.1: *Forskellige usikkerhedsbeskrivelser og tilsvarende betingelser for robust stabilitet.*

Vi kan nu opstille et designkriterium for robust stabilitet. Givet f.eks. en additiv usikkerhedsbeskrivelse $W_{u2}(s)\Delta(s)W_{u1}(s)$ kan vores robust stabilitetsproblem formuleres som at designe en nominelt stabiliserende regulator således at omkostningsfunktionen

$$\mathcal{J}_u = \|W_{u1}(s)M(s)W_{u2}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.86)$$

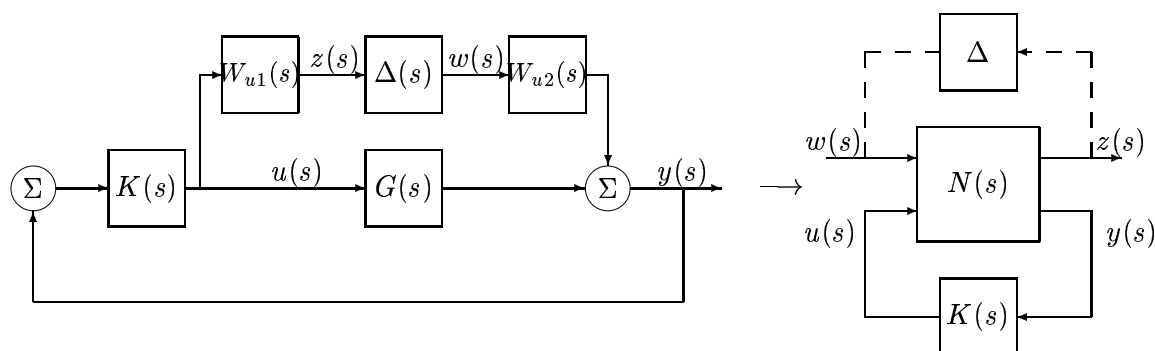
minimeres. Ergo:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|W_{u1}(s)M(s)W_{u2}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.87)$$

hvor \mathcal{K}_S betegner alle nominelt stabiliserende regulatorer. Hvis en stabiliserende regulator kan opnå at $\mathcal{J}_u < 1$ siger vi at lukketsløjfe systemet er robust stabilt.

Bemærk, at strukturen for vores robust stabilitetsproblem er identisk med strukturen for det nominelle ydeevneproblem på side 48. Dermed kan robust stabilitetsproblemet formuleres som et 2×2 blok problem. Givet en additiv usikkerhedsspecifikation kan det tilsvarende 2×2 blok problem udledes som illustreret i Figur 5.5, hvor

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & W_{u1}(s) \\ W_{u2}(s) & G(s) \end{bmatrix} \quad (5.88)$$



Figur 5.5: *Robust stabilitetsproblem. Udvidet lukket sløjfe og tilsvarende 2×2 blok form.*

Overføringsfunktionen fra $w(s)$ til $z(s)$ er givet ved

$$z(s) = W_{u1}(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}W_{u2}(s)w(s) \quad (5.89)$$

$$= F_l(N(s), K(s))w(s) \quad (5.90)$$

$$= W_{u1}(s)M(s)W_{u2}(s)w(s) \quad (5.91)$$

og vores robust stabilitetsproblem kan formuleres som:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}} \|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty}. \quad (5.92)$$

hvilket er fuldstændig identisk med det nominelle ydeevne problem. Minimeringen (5.92) er således et standard \mathcal{H}_∞ problem, der kan løses med metoder, der introduceres i Kapitel 6 på side 61.

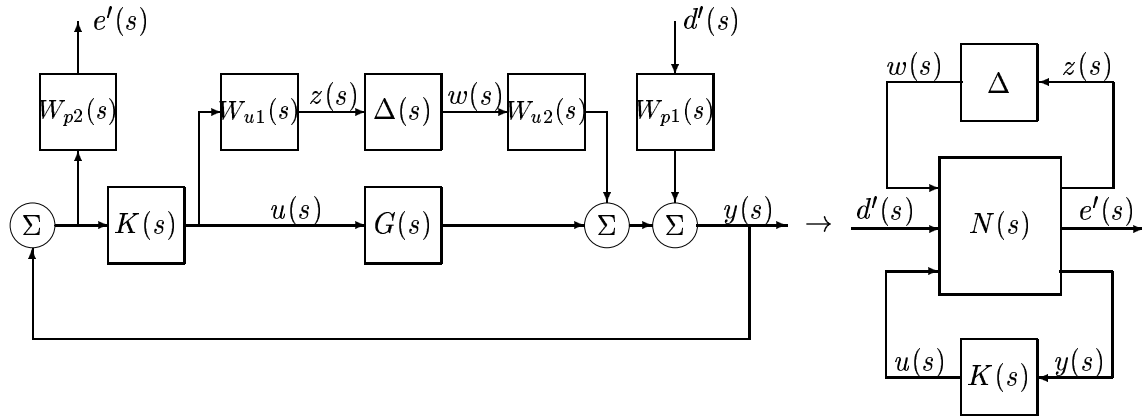
5.3 Robust ydeevne

Til slut i dette kapitel vil vi betragte robust ydeevne. Robust ydeevne design kriteriet kan udledes fra det nominelle ydeevne kriterium (5.49) med nominel sensitivitet $S_o(s)$ erstattet med perturberet sensitivitet $S_{o,\Delta}(s)$:

$$\mathcal{J}_{rp} = \|W_{p2}(s)S_{o,\Delta}(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.93)$$

Lad os illustrere med en additiv usikkerhedsmodel. Så kan robust ydeevne problemet illustreres som på Figur 5.6, hvor

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_{u1}(s) \\ W_{p2}W_{u2}(s) & W_{p2}W_{p1} & W_{p2}G(s) \\ W_{u2} & W_{p1} & G(s) \end{bmatrix} \quad (5.94)$$



Figur 5.6: Robust ydeevne problem med additiv usikkerhed.

Lad $P(s) = F_l(N(s), K(s))$. Da er overføringsmatricen fra $d'(s)$ til $e'(s)$ givet ved:

$$e'(s) = F_u(P(s), \Delta(s))d'(s) = \left[P_{22}(s) + P_{21}(s)\Delta(s)(I - P_{11}(s)\Delta(s))^{-1}P_{12}(s) \right] d'(s) \quad (5.95)$$

$$= W_{p2}(s)(I + G(s)K(s) + G(s)W_{u2}(s)\Delta(s)W_{u1}(s))^{-1}W_{p1}(s)d'(s) \quad (5.96)$$

$$= W_{p2}(s)S_{o,\Delta}(j\omega)W_{p1}(s)d'(s) \quad (5.97)$$

Robust ydeevne design problemet bliver nu

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_s} \sup_{\Delta(s)} \|F_u(F_l(N(s), K(s)), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.98)$$

Hvis

$$\|F_u(F_l(N(s), K(s)), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} = \|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.99)$$

for alle $\Delta(s)$ for hvilke $\|\Delta(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 1$, siger vi at lukket sløjfe systemet har robust ydeevne. Bemærk, at \mathcal{H}_∞ betingelsen (5.99) for robust ydeevne ligner \mathcal{H}_∞ betingelsen (5.71) for robust stabilitet. Derfor kan vi konkludere, at systemet $F_u(P(s), \Delta(s))$ opfylder robust ydeevne betingelsen (5.99), hvis og kun hvis det er robust stabilt overfor en normbegrænset matrix perturbation $\Delta_p(s)$, for hvilken $\bar{\sigma}(\Delta_p(j\omega)) \leq 1, \forall \omega \geq 0$. Dette er en væsentlig begrundelse for netop at benytte 2-normen til at måle ydeevne med. Vi kan da ækvivalere robust ydeevne betingelsen med en robust stabilitetsbetingelse ved at udvide vores perturbation struktur med en ydeevne blok $\Delta_p(s)$, se Figur 5.7.

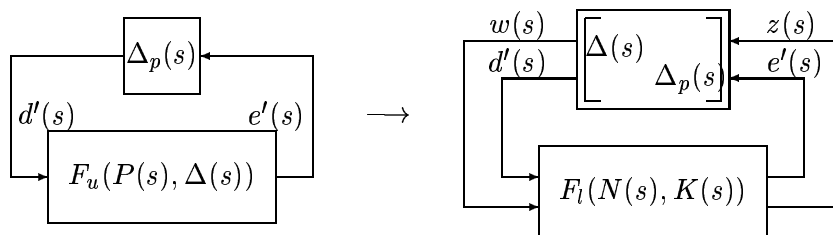
Lad $\tilde{\Delta}(s) = \text{diag}\{\Delta(s), \Delta_p(s)\}$ betegne den udvidede perturbationsstruktur. Vi har da følgende sætning:

Sætning 5.3 (Robust ydeevne) Antag at systemet $P(s) = F_l(N(s), K(s))$ er stabilt samt, at perturbationen $\tilde{\Delta}(s)$ er af en sådan form, at den perturberede lukket sløjfe i Figur 5.7 er stabil hvis og kun hvis billedkurven af $\det(I - P(s)\tilde{\Delta}(s))$, når s gennemløber Nyquist \mathcal{D} konturen, ikke omkranser origo. Da vil systemet $F_u(P(s), \Delta(s))$ opfylde robust ydeevne betingelsen (5.99) hvis og kun hvis $P(s)$ er stabil for alle perturbationer $\tilde{\Delta}(s)$ for hvilke $\bar{\sigma}(\tilde{\Delta}(j\omega)) \leq 1, \forall \omega \geq 0$:

$$\det(I - P(j\omega)\tilde{\Delta}(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall \tilde{\Delta}(j\omega) : \bar{\sigma}(\tilde{\Delta}(j\omega)) \leq 1 \quad (5.100)$$

$$\Leftrightarrow \rho(P(j\omega)\tilde{\Delta}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega, \forall \tilde{\Delta}(j\omega) : \bar{\sigma}(\tilde{\Delta}(j\omega)) \leq 1 \quad (5.101)$$

$$\Leftrightarrow \|P(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.102)$$



Figur 5.7: Blok diagram for robust ydeevne problem. Perturbationsstrukturen er udvidet med en ydeevne blok $\Delta_p(s)$.

Bevis for Sætning 5.3 Følger direkte af Sætning 5.2. Da strukturen af $\tilde{\Delta}(s)$ er diagonal (dvs. restriktiv) er betingelsen (5.102) kun en tilstrækkelig betingelse for robust ydeevne.

Det er intuitivt klart, at en nødvendig betingelse for robust ydeevne er, at lukket sløjfen er robust stabil og har nominal ydeevne. Ergo, i forbindelse med additiv usikkerhed er en nødvendig betingelse for robust ydeevne givet ved:

$$\mathcal{J}_{np} = \|W_{p2}(s)S_o(s)W_{p1}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.103)$$

$$\mathcal{J}_u = \|W_{u1}(s)M(s)W_{u2}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.104)$$

Den tilstrækkelige betingelse (5.102) er ensbetydende med, at overføringsfunktionen $P(s) = F_l(N(s), K(s))$ fra $[w(s); d'(s)]$ til $[z(s); e'(s)]$ har \mathcal{H}_∞ -norm mindre end 1. Vi kan således formulere robust ydeevne problemet som et \mathcal{H}_∞ problem:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (5.105)$$

der har en kendt løsning. Hvis en regulator opnår, at

$$\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1 \quad (5.106)$$

så har lukket sløjfe systemet robust ydeevne. Da betingelsen (5.102) imidlertid kun er tilstrækkelig (ikke nødvendig) er den potentiel konservativ. Ergo kan lukket sløjfen godt have robust ydeevne selvom (5.106) *ikke* er opfyldt. Grunden hertil er, at vi med en \mathcal{H}_∞ regulator ikke kan tage højde for, at off-diagonal elementerne i den udvidede perturbation $\tilde{\Delta}(s)$ er lig med nul.

Det er generelt vanskeligt at sige noget om i hvilken grad \mathcal{H}_∞ løsningen er konservativ, men det kan dog vises, at:

- Hvis vi har en ydeevne specifikation på output sensitiviteten af typen (5.42), enten en additiv eller output multiplikativ usikkerhedsbeskrivelse samt begrænser vægtfunktionerne $W_{p1}(s)$ og $W_{u2}(s)$ til at være skalære overføringsfunktioner ganget med en enhedsmatrix:

$$W_{p1}(s) = w_{p1}(s) \cdot I, \quad W_{u2}(s) = w_{u2}(s) \cdot I \quad (5.107)$$

og hvis robust stabilitets- samt nominal ydeevne-kriteriet skærpes med en faktor 2, vil lukket sløjfen have robust ydeevne. I dette tilfælde kan vi, med andre ord, garantere robust ydeevne hvis robust stabilitet og nominal ydeevne er opfyldt med en margin på 2.

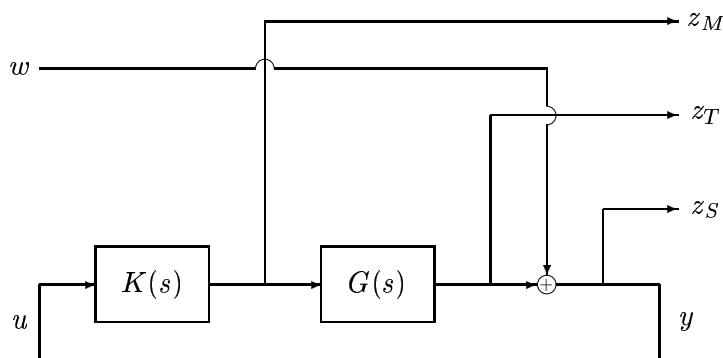
- Hvis vi har en ydeevne specifikation på output sensitiviteten af typen (5.42) som ovenfor, men en input multiplikativ usikkerhed (selvom vi begrænser vægtmatricerne som ovenfor), og hvis processen $G(s)$ er dårligt konditioneret, dvs. at

$$\kappa(G(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}(G(j\omega))}{\underline{\sigma}(G(j\omega))} \gg 1 \quad \text{i et frekvensområde } \Omega \quad (5.108)$$

da kan robust ydeevne ikke garanteres *selvom vi har både nominal ydeevne og robust stabilitet med margin mindre end $\sup_{\omega} \kappa(G(j\omega))$* .

5.3.1 Specifikationer med blandede sensitivitetfunktioner

For flervariable systemer kan vi definere sensitivitet-funktionerne ud fra fig. tilbagekoblede system:



hvor w er et forstyrrelsessignal, z_T er udgangene, z_S er udgange plus forstyrrelser, og z_M er styresignalet. Da gælder fig. relation:

$$\begin{pmatrix} z_S \\ z_T \\ z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(s) \\ T(s) \\ M(s) \end{pmatrix} w$$

hvor

$$S = (I - GK)^{-1} \quad (\text{sensitivitet})$$

$$M = K(I - GK)^{-1} \quad (\text{kontrol-sensitivitet})$$

$$T = GK(I - GK)^{-1} \quad (\text{komplementær sensitivitet})$$

I det følgende skal vi se, hvordan et reguleringssystem kan dimensioneres ud fra krav til sensitiviteterne. Udgangspunktet for dette er den følgende fortolkning af af sensitiviteterne:

At gøre *sensitiviteten* $S(s)$ lille indebærer:

- God forstyrrelsesdæmpning
- God referencefølgning (båndbredde)

At gøre *kontrol-sensitiviteten* $M(s)$ lille indebærer:

- Robusthed mht. additive usikkerheder (se Tabel 5.1, side 53)

- Moderate regulator-forstærkninger
- Begrænset indflydelse af støj

At gøre den *komplementære sensitivitet* $T(s)$ lille indebærer:

- Robusthed mht. multiplikative usikkerheder (se Tabel 5.1)
- Begrænset indflydelse af støj
- Moderate regulator-forstærkninger

En grundlæggende afvejning, der må foretages i ethvert reguleringssystem, er baseret på *komplementaritetsprincippet*, som baserer sig på flg. vigtige observation:

$$S(s) - T(s) \equiv I \quad (5.109)$$

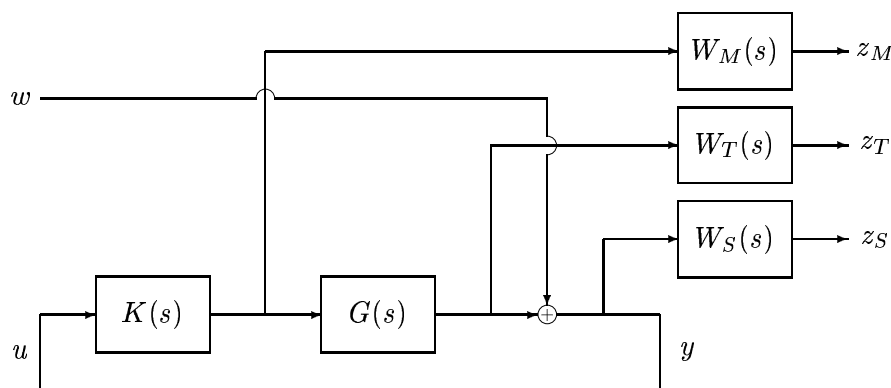
Denne identitet viser eksistensen af et grundlæggende trade-off mellem ydeevne og robusthed, da S og T ikke kan gøres små samtidig!

Derfor må enhver fornuftig syntese-metode (\mathcal{H}_∞ eller andre) have mulighed for at betragte parret (S, T) (eller alternativt parret (S, M)) med henblik på at beslutte ved hver frekvens om $S(j\omega)$ eller $T(j\omega)$ (alternativt: $S(j\omega)$ eller $M(j\omega)$) skal gøres lille.

Sådanne dimensioneringsalgoritmer kaldes under ét *blandet sensitivitets*-metoder.

5.3.1.1 Formulering af krav for blandede sensitiviteter i \mathcal{H}_∞ norm

Betragt følgende diagram:



Ved at definere:

$$z = \begin{pmatrix} z_S \\ z_T \end{pmatrix} \text{ eller } z = \begin{pmatrix} z_S \\ z_M \end{pmatrix}$$

opnår vi et standard-problem for hvilket de tilsvarende overføringsfunktioner fra w til z tilfredsstiller

$$\left\| \begin{pmatrix} W_S S \\ W_T T \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \text{ eller } \left\| \begin{pmatrix} W_S S \\ W_M M \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1$$

Dette medfører så, at $\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1$ og

$$\|W_T(s)T(s)\|_\infty < 1 \text{ eller } \|W_M(s)M(s)\|_\infty < 1$$

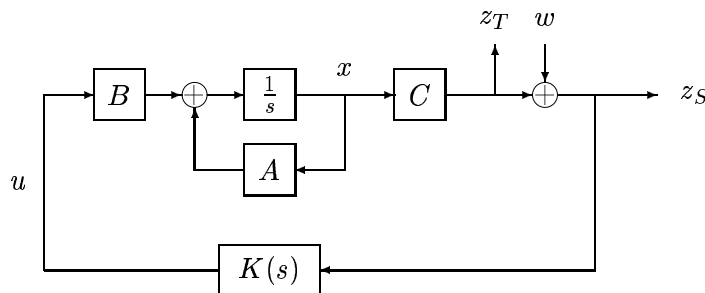
Ideelt set kunne man forestille sig, at de to relevante vægtmatricer (enten W_S og W_T eller W_S og W_M) direkte var givet ud fra problemformuleringen. I praksis vil det imidlertid ofte vise sig, at vægtmatricerne til en vis grad er "tuningparametre", dvs. at de vælges ud fra indirekte kriterier. Fornuftige valg er dog i stor udstrækning fastlagt af komplementaritetsprincippet (5.109) samt andre fundamentale begrænsninger for blandede sensitivitetsproblemer, som beskrevet i næste afsnit.

5.3.2 Betydning af nulpunkter og poler i højre halvplan

Ved formulering af krav til robuste reguleringsystemer er det vigtigt at vide hvilke "indbyggede" begrænsninger, der er i et forelagt dynamiske system. Der er mange forskellige forhold, der spiller ind i denne forbindelse, men her vil vi kun studere betydningen af eventuelle nulpunkter og poler i højre halvplan.

5.3.2.1 Betydning af nulpunkter i højre halvplan

Vi betragter et reguleringsystem på formen:



Hvor $K(s)$ er en stabiliserende regulator.

Hvis systemet har et nulpunkt z i den afsluttede, højre halvplan, vil en påvirkning af formen

$$w = e^{zt}w_0$$

hvor w_0 er en til z hørende inputvektor give anledning til flg. stationære løsning:

$$u(t) = K(z)e^{zt}w_0, \quad z_T(t) \equiv 0, \quad z_S(t) = w(t)$$

hvoraf vi slutter, at

$$S(z)w_0 = w_0$$

hvilket medfører at

$$\bar{\sigma}(S(z)) \geq 1$$

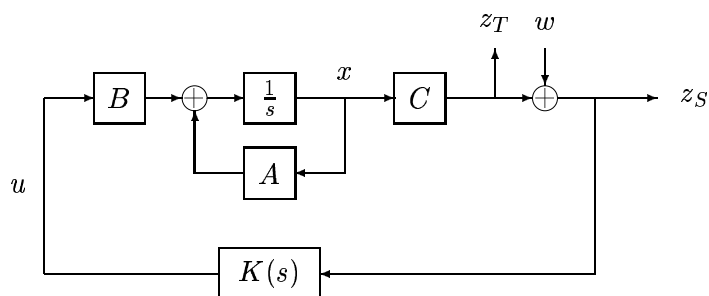
uanset hvilken stabiliserende regulator $K(s)$, der er valgt. ($S(\cdot)$ betegner udgangssensitiviteten). Da \mathcal{H}_∞ normen af en funktion mindst er lig den største singulære værdi i et vilkårligt punkt i højre halvplan giver dette anledning til uligheden

$$\|W_S(\cdot)S(\cdot)\|_\infty \geq \|W_S(z)\|$$

Med andre ord giver hvert nulpunkt i højre halvplan altså anledning til en nedre grænse for hvor lille \mathcal{H}_∞ normen af et systems sensitivitet kan blive, altså hvor god forstyrrelsesundertrykkelse eller båndbredde, vi kan få.

5.3.2.2 Betydning af poler i højre halvplan

Vi betragter et reguleringsystem på formen:



Hvor $K(s)$ er en stabiliserende regulator.

Hvis systemet har en pol p i den afsluttede, højre halvplan, vil en påvirkning af formen

$$w = e^{pt} w_0$$

give anledning til flg. stationære løsning:

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^{pt} x_0, \quad \text{hvor } Cx_0 = w_0, \\ z_T(t) &= -w(t), \quad z_S(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0 \end{aligned}$$

hvoraf vi slutter, at

$$T(p) = -I$$

uanset hvilken stabiliserende regulator $K(s)$, der er valgt. (Hvor $T(s)$ er den komplementære udgangssensitivitet). Dette giver anledning til uligheden

$$\|W_T(\cdot)T(\cdot)\|_\infty \geq \|W_T(p)\|$$

Med andre ord giver polen i den højre halvplan anledning til en nedre grænse for, hvor lille den komplementære sensitivitet kan være, dvs. hvor god robusthed, der kan opnås for systemet.

Med baggrund i observationerne i dette afsnit og i Afsnit 5.3.2.1, kan man udlede flg. retningslinier for valg af vægtmatricerne W_S og W_T (og tilsvarende for W_S og W_M):

1. Vælg generelt vægten W_S stor ved lave frekvenser og lille ved høje frekvenser.
2. Vælg generelt vægten W_T lille ved lave frekvenser og stor ved høje frekvenser.
3. Vælg vægten W_S lille for frekvenser, der svarer til nulpunkter i højre halvplan.
4. Vælg vægten W_T lille for frekvenser, der svarer til poler i højre halvplan.

Disse retningslinier forudsætter, at ydeevnespecifikationer er relateret til lave frekvenser, samt at robusthedsproblemer er relateret til høje frekvenser. Dette vil i de fleste praktiske problemer være tilfældet.

Kapitel 6

Robust dimensionering af flervariable systemer

Tidligere har vi undersøgt hvordan man kan analysere et flervariabelt reguleringssystem for nominal og robust stabilitet samt nominal og robust ydeevne. Vi gik her ud fra at kravene til robusthed var specificeret i form af vægtmatricerne $W_{u1}(s)$ og $W_{u2}(s)$ og at ydeevnekravene tilsvarende var specificeret ved $W_{p1}(s)$ og $W_{p2}(s)$. Hvordan man kommer frem til vægtmatricer der fører til gode regulatorer er stadig et åbent og er måske det vanskeligste spørgsmål i robust regulering. Vi vil i det følgende omtale 2 tilgange til det uden på nogen måde at komme til et færdigt svar.

6.1 Sløjfe-tilpasning

Ideen i sløjfetilpasning (engelsk: *loop shaping*) er at finde en regulator $K(s)$, som former åbensløjfen $\bar{\sigma}(L(j\omega))$, så man får opfyldt visse krav til robusthed og ydeevne.

Kravene til ydeevne vil naturligt være at der er en god undertrykkelse af forstyrrelser, så fejlen bliver lille. Fejlen kan som tidligere vist findes ved

$$e(s) = S_o(s)(r(s) - d(s)) + T_o(s)n(s) \quad (6.1)$$

Ofte vil det være rimeligt at se bort fra målestøjen $n(s)$, så det væsentligste krav til ydeevne er, at outputsensitiviteten $\bar{\sigma}(S_o(j\omega))$ er lille i det frekvensområde, hvor de væsentligste forstyrrelser optræder. Da de fleste forstyrrelser er lavfrekvente, fører det til et krav om at outputsensitiviteten skal være lille ved frekvenser op til en vis grænse, som designeren fastlægger afhængigt af en vurdering af de dominerende forstyrrelser. Dette kan opnås ved at specificere

$$W_{p1} = IW_p(s) \quad (6.2)$$

$$W_{p2} = I \quad (6.3)$$

hvor $W_p(s)$ er en skalar overføringsfunktion med lavpaskarakter. Et krav af denne karakter

vil være ækvivalent med et krav om at den mindste singularværdi $\underline{\sigma}(L_o(j\omega))$ af åbensløjfe-funktionen ved output er stor ved lave frekvenser:

$$\underline{\sigma}(L_o(j\omega)) > W_p(j\omega) \quad (6.4)$$

Usikkerhederne i fysiske systemer er ofte størst ved høje frekvenser. Hvis man ikke har detaljeret kendskab til usikkerhederne i processen, vil det være naturligt at specificere en multiplikativ usikkerhed på udgangen

$$W_{u1} = I \cdot W_u(s) \quad (6.5)$$

$$W_{u2} = I \quad (6.6)$$

hvor $W_u(s)$ er en skalær overføringsfunktion med højpaskarakter, så $W_u(j\omega)$ har en værdi svarende til usikkerheden på DC forstærkningen ved lave frekvenser og en værdi der ved høje frekvenser bliver større end 1. Krav af denne karakter fører til krav om at

$$\bar{\sigma}(T_o(j\omega)) < \frac{1}{W_u(j\omega)} \quad (6.7)$$

Dette vil være ækvivalent til at den største singularværdi af åbensløjfematrixen $\bar{\sigma}(L_o(j\omega))$ skal være lille ved høje frekvenser:

$$\bar{\sigma}(L_o(j\omega)) < \frac{1}{W_u(j\omega)} \quad (6.8)$$

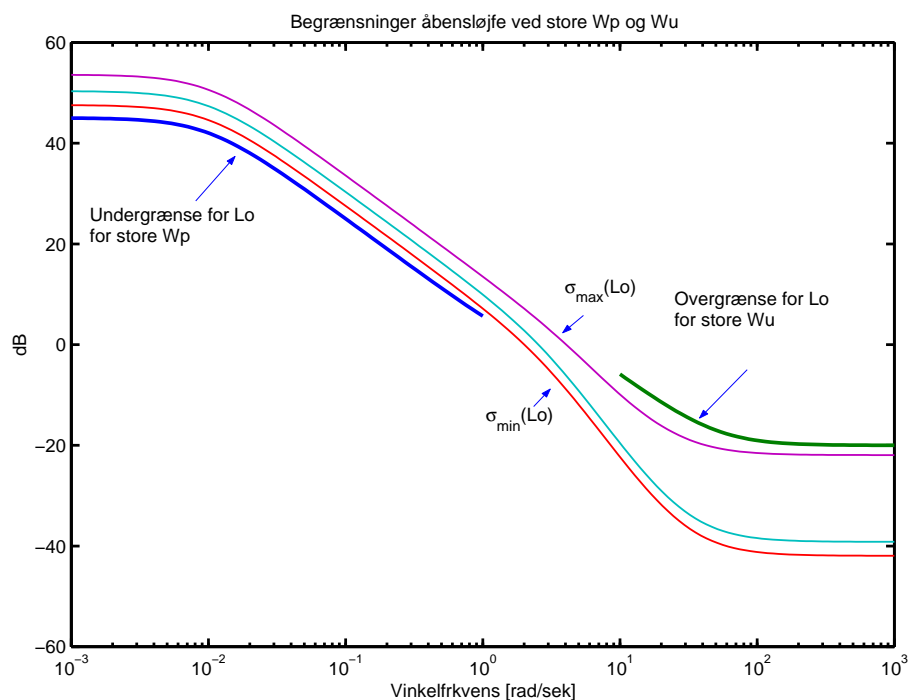
Specifikation af vægtfunktionerne bliver på denne måde et spørgsmål om trade-off mellem god forstyrrelsesundertrykkelse og robusthed og det interessante valg bliver den frekvens hvor kurverne krydser hinanden. Ved denne frekvens skal man sikre sig, at begge vægtfunktioner er mindre end 1 for at kravene er mulige at opfylde.

På Figur 6.1 er vist et eksempel på hvordan sådanne krav kunne se ud. Metoden giver ikke direkte noget svar på hvordan åbensløjfe singularværdierne skal forløbe tæt på overkrydsningsfrekvenserne, det vil sige der hvor kurveskæren for åbensløjfe-singularværdierne krydser 1 (0 dB). Det kan dog ses, at det er hensigtsmæssigt, at singularværdierne ligger tæt på hinanden.

Andre overføringsfunktioner end $S_o(s)$ og $T_o(s)$ kan være interessante i forbindelse med sløjfetilpasning. Hvis man vil sikre sig at styresignalerne $u(s)$ ikke bliver for store må man sikre sig at kontrolsensiviteten $M(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}K(s)$ ikke er for stor. Ligeledes kan der være tilfælde hvor man har bedst kendskab til additiv modelusikkerhed hvilket også fører til krav til kontrolsensiviteten $M(s)$.

6.2 Modellering af input og modelusikkerhed

Ved sløjfe-tilpasning interesserer man sig kun for størrelsen af sensitivitet og komplementær sensitivitet, hvilket for flervariable systemer kan føres over på krav til åbensløjfematrixens



Figur 6.1: *Krav til åbensløjfe forstærkningen fra W_p og W_u i frekvensområder hvor de hver især er store*

største og mindste singularværdi. Det har den begrænsning, at man ikke kan håndtere problemer, hvor der er forskellige krav i forskellige kanaler. Det kan illustreres ved følgende. Antag at usikkerheden er fundet til

$$\Delta = I\tilde{\Delta}W_u(s) \quad (6.9)$$

for at sikre robust stabilitet kan man nøjes med kravet $\bar{\sigma}(W_u T_o) < 1$. Hvis man derimod begrænser sig til at stille krav til største singular værdi bliver kravet

$$\bar{\sigma}(T_o) < \frac{1}{\bar{\sigma}(W_u)} \quad (6.10)$$

Dette krav kan være langt mere restriktivt, hvis der er stor forskel på usikkerheden i de enkelte kanaler af overføringsfunktionen.

Det vil derfor være langt bedre at foretage en konkret vurdering af usikkerheden på hver enkelt overføringsfunktion i overføringsmatricen. Denne vurdering kan foretages f.eks. ved at vurdere parameterusikkerheder i den parametriske model eller ved at vurdere en frekvensmæssig grænse for gyldigheden af modellen og indsætte multiplikative usikkerheder i hver kanal som indbygger denne grænse.

På samme måde vil det være af stor betydning for det samlede resultat, at der foretages en konkret vurdering af de aktuelle forstyrrelser i hver enkelt kanal og en vurdering af fejlsens

vigtighed på hvert output. Især hvis der er forskel på størrelsesordenen af de enkelte signaler er det vigtigt, at der ved output skaleres, så det er meningsfyldt at tale om samme grænse på normen af output.

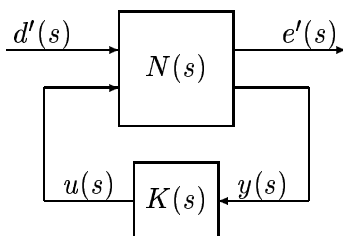
6.3 \mathcal{H}_∞ Regulering

I dette kapitel vil vi præsentere en state-space løsning til \mathcal{H}_∞ reguleringsproblemet i 2×2 blok formuleringen. Denne løsning blev fundet af Doyle *et al.* i 1988. Strukturen af \mathcal{H}_∞ løsningen vil blive sammenlignet med den velkendte LQG-struktur, hvorved vi kan se, at der er mange lighedspunkter mellem de to. Faktisk kan man fortolke LQG løsningen som et specialtilfælde af den generelle \mathcal{H}_∞ løsning.

Vi vil altså give en løsning til problemet:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_s} \|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} \quad (6.11)$$

Problemet med at finde en løsning til (6.11) var nok det vigtigste forskningsområde inden for reguleringsteori i 1980'erne. Til at begynde med eksisterede der kun algoritmer, der gav \mathcal{H}_∞ optimale regulatorer af meget høj orden, se f.eks. [Fra87], eller som kun kunne bruges på SISO systemer, se eks. [Gri86]. Så i begyndelsen af 1988 annoncerede Doyle, Glover, Khargonekar og Francis en state-space løsning, der kun involverede 2 Riccati ligninger og som gav en regulator af samme orden som det udvidede system $N(s)$, helt på samme vis som LQG løsningen. Dette var et stort gennembrud for \mathcal{H}_∞ teori. Det blev nu klart, at der eksisterede stor parallelitet imellem LQG og \mathcal{H}_∞ løsningerne. Begge regulatorer har en tilstandsestimator-tilstandstilbagekoblings-struktur og 2 Riccati ligninger giver tilstandstilbagekoblingen K_c og forstærkningen K_f i tilstandsestimatoren.



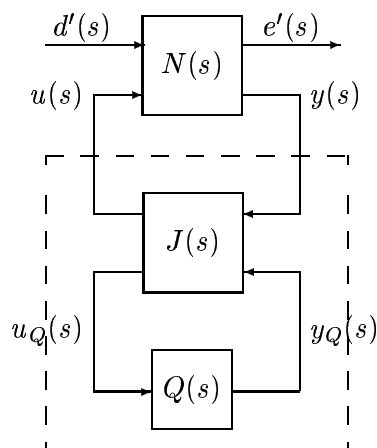
Figur 6.2: 2×2 blok problemet.

Givet en 2×2 blok-matrix $N(s)$, se Figur 6.2 samt en ønsket øvre grænse γ på \mathcal{H}_∞ normen $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty}$ returnerer \mathcal{H}_∞ løsningen en regulatorparameterisering, ofte kaldet DGKF-parameteriseringen:

$$K(s) = F_l(J(s), Q(s)) \quad (6.12)$$

af alle stabiliserende regulatorer for hvilke $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$, se Figur 6.3. Enhver stabil overføringsmatrix $Q(s)$ for hvilken $\|Q(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$ vil stabilisere systemet og gøre at $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$. Enhver $Q(s)$, der er ustabil eller har \mathcal{H}_∞ -norm større end γ vil gøre lukket sløjfen ustabil eller medføre, at $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} \geq \gamma$ eller begge dele.

\mathcal{H}_∞ løsningen er givet ved Definition 6.1 samt Theorem 6.1.



Figur 6.3: *DGKF-Parameteriseringen af alle stabiliserende regulatorer, der opfylder $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$.*

Definition 6.1 (Riccati Løsning) Lad X være en løsning til Riccati ligningen

$$A^T X + XA - XRX + Q = 0 \quad (6.13)$$

Vi vil nu bruge notationen $X = \mathbf{Ric}(H)$ hvor H er den associerede Hamilton matrix

$$H = \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

til at angive denne løsning.

Sætning 6.1 (\mathcal{H}_∞ -Suboptimal Reguleringsproblem) Denne løsning er taget fra [Dai90]. Lad $N(s)$ være givet ved state-space realisationen A, B, C, D og introducer notationen:

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (6.15)$$

hvor B, C og D er partitioneret efter d', e', u og y . Gør nu flg. antagelser:

1. (A, B_1) og (A, B_2) er stabiliserbare (styrbare).
2. (C_1, A) og (C_2, A) er detekterbare (observerbare).
3. $D_{12}^T D_{12} = I$ og $D_{21} D_{21}^T = I$.
4. $D_{11} = D_{22} = 0$.

Lad

$$\tilde{D}_{12} = I - D_{12} D_{12}^T, \quad \tilde{D}_{21} = I - D_{21}^T D_{21} \quad (6.16)$$

og løs de to Riccati ligninger

$$X_\infty = \mathbf{Ric} \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T \tilde{D}_{12}^T \tilde{D}_{12} C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$Y_\infty = \mathbf{Ric} \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 \tilde{D}_{21} \tilde{D}_{21}^T B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Dan tilstandstilbagekoblingen K_c , forstærkningen i observeren K_f samt matricen Z_∞ som

$$K_c = (D_{12}^T C_1 + B_2^T X_\infty) \quad (6.19)$$

$$K_f = (B_1 D_{21}^T + Y_\infty C_2^T) \quad (6.20)$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (6.21)$$

Hvis $X_\infty \geq 0$ og $Y_\infty \geq 0$ eksisterer og hvis spektralradien $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ så er DGKF-parameteriseringen givet ved

$$J(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & Z_\infty K_f & Z_\infty (B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12}) \\ \hline -K_c & 0 & I \\ -(C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) & I & 0 \end{array} \right] \quad (6.22)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11}(s) & J_{12}(s) \\ J_{21}(s) & J_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

hvor A_∞ er givet ved

$$A_\infty = A - B_2 K_c + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - Z_\infty K_f (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) \quad (6.24)$$

Stabiliserende regulatorer $K(s)$, der opfylder $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$ kan da konstrueres ved at koble $J(s)$ med enhver stabil $Q(s)$ for hvilken $\|Q(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$:

$$K(s) = F_l(J(s), Q(s)) = J_{11}(s) + J_{12}(s)Q(s)(I - J_{22}(s)Q(s))^{-1} J_{21}(s) \quad (6.25)$$

\mathcal{H}_∞ -normen af lukket sløjfen $F_l(N(s), F_l(J(s), Q(s)))$ opfylder da

$$\|F_l(N(s), F_l(J(s), Q(s)))\|_\infty < \gamma \quad (6.26)$$

Regulatoren opnået med $Q(s) = 0$ kaldes den centrale \mathcal{H}_∞ regulator.

6.3.1 Bemærkninger til \mathcal{H}_∞ løsningen

Bemærk at Sætning 6.1 *ikke* giver den optimale \mathcal{H}_∞ regulator, men istedet en regulator, der opfylder $\|F_l(N(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < \gamma$ efter at γ er specificeret hvis der eksisterer en regulator, der kan gøre det. Ergo må designeren iterere på γ for at tilnærme den optimale \mathcal{H}_∞ -norm γ_0 . Derfor kalder vi løsningen i Sætning 6.1 for den *sub-optimale* \mathcal{H}_∞ regulator. Dette er forskelligt fra LQG løsningen hvor den optimale regulator kan findes uden iteration. Den centrale regulator ($Q(s) = 0$) er ikke nødvendigvis den regulator, der giver den mindste \mathcal{H}_∞ -norm for lukket sløjfen. Da det imidlertid er en gyldig regulator, givet den ønskede γ værdi, er det normalt at vælge netop denne regulator for implementation. Specielt er det denne regulator som MATLAB Robust Control Toolbox og μ -Analysis and Synthesis Toolbox algoritmerne leverer.

Bemærk yderligere, at selvom \mathcal{H}_∞ reguleringsproblemet er givet i frekvensdomænet, er løsningen givet i tilstands form, dvs. i tidsdomænet. Denne kombination af frekvensdomæne specifikationer og state-space beregninger er meget symptomatisk for moderne reguleringssteori.

Betragt nu de 4 nødvendige antagelser i Sætning 6.1. Antagelse 1 og 2 siger blot at det generaliserede system $N(s)$ skal være stabiliserbart og detekterbart; klart rimelige antagelser. Antagelse 3 betyder, at antallet af søjler i D_{12} ikke overstiger antallet af rækker. Vi siger, at D_{12} skal være "høj". På samme vis gælder, at D_{21} ikke må have flere rækker end søjler, dvs. den skal være "flad". Dette medfører følgende betingelser på dimensionen af signalerne $e'(s)$, $d'(s)$, $u(s)$, $y(s)$:

$$\dim e'(s) \geq \dim u(s), \quad \dim d'(s) \geq \dim y(s) \quad (6.27)$$

hvor $\dim x$ angiver dimensionen af vektoren x . Altså skal antallet af eksterne output (fejlsignaler) $[e'_1, \dots, e'_e]$ være større end eller lig med antallet af styrbare input (aktuatorer) $[u_1, \dots, u_m]$. Ligeledes skal antallet af eksterne input (forstyrrelser) $[d'_1, \dots, d'_d]$ være større end eller lig med antallet af målte output (sensorer) $[y_1, \dots, y_r]$. For SISO systemer har vi at $\dim u(s) = \dim y(s) = 1$, og således betyder disse antagelser blot, at både $d'(s)$ og $e'(s)$ skal eksistere, hvilket jo er en rimelig antagelse. For flervariabel systemer er det imidlertid muligt at forme absolut fornuftige design problemer, der *ikke* opfylder (6.27). I sådanne tilfælde må vi tilføje fiktive input eller output med lille vægt.

Vi mangler imidlertid at vise, at $D_{12}^T D_{12} = I = D_{21} D_{21}^T$. Det er klart at en generel D matrix ikke opfylder disse krav pr. automatik. Det kan imidlertid vises, at et design problem med en generel D matrix under visse omstændigheder kan omformuleres til et nyt design problem, *der har samme \mathcal{H}_∞ norm for overføringsmatricen fra $d'(s)$ til $e'(s)$ som vores oprindelige problem*; men som opfylder følgende:

$$D_{11} = 0 \quad (6.28)$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$D_{22} = 0 \quad (6.31)$$

således at antagelserne 3 og 4 begge er opfyldt. Denne omformulering opnås gennem en skalering og "loop-shifting". Det er imidlertid uden for denne notes intentioner at komme nærmere ind på dette. En reference er [TC96, App. B]. For at kunne udføre denne omformulering må vi kræve at D_{12} og D_{21}^T har fuld sølje rang, hvilket vil sige at

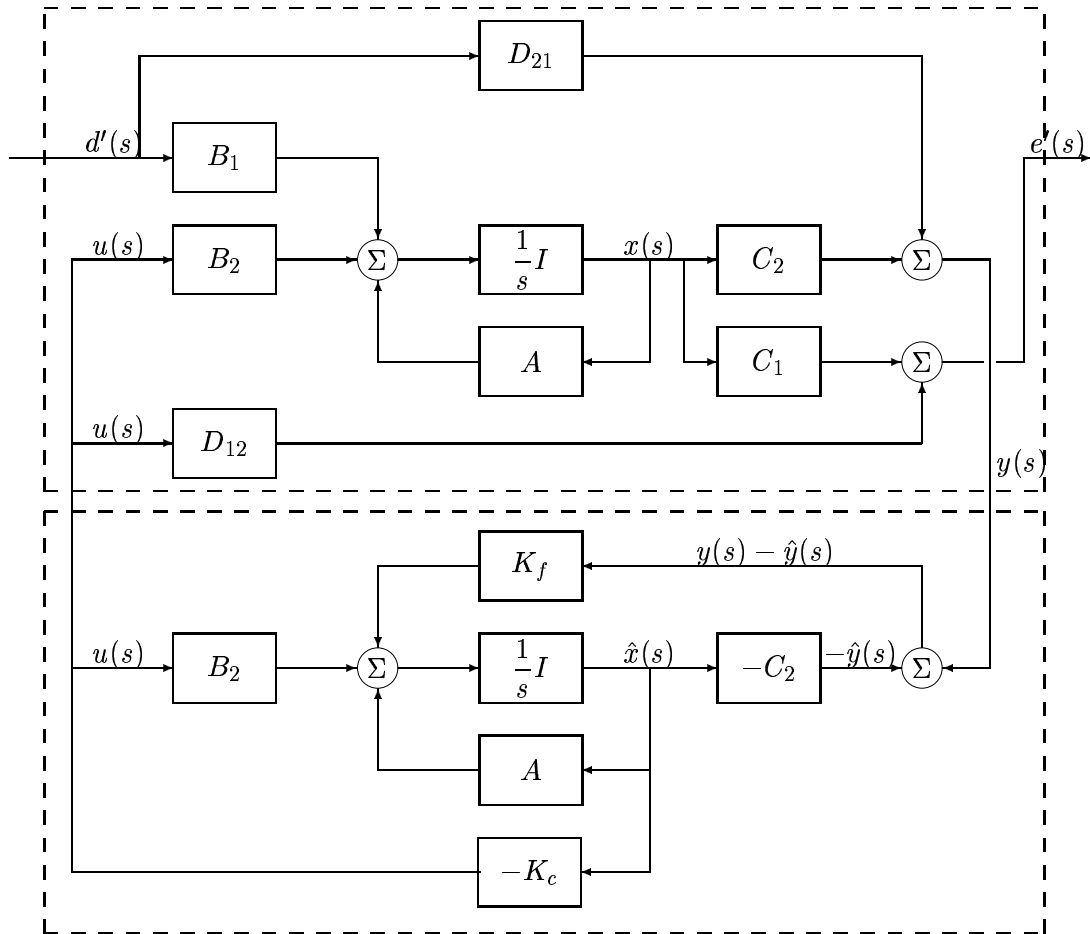
$$\text{rank } D_{12} = \dim u, \quad \text{rank } D_{21} = \dim y \quad (6.32)$$

Disse to betingelser er meget almindelige inden for robust regulering. I MATLAB Robust Control toolbox og i μ -Analysis and Synthesis toolbox skal (6.32) være opfyldt for at kunne beregne den (sub-) optimale \mathcal{H}_∞ regulator.

Men hvad betyder disse rang-betingelser så? Jo, rang-betingelsen på D_{12} betyder, at der skal være et direkte led i overføringsmatricen fra de styrbare input $u(s)$ til fejlsignalerne $e'(s)$. Det betyder, at mindst en af SISO overføringsfunktionerne i denne overføringsmatrix skal have lige mange poler og nulpunkter. På samme vis betyder rang-betingelsen på D_{21} , at der skal være et direkte led i overføringsmatricen fra forstyrrelserne $d'(s)$ til det målte output $y(s)$.

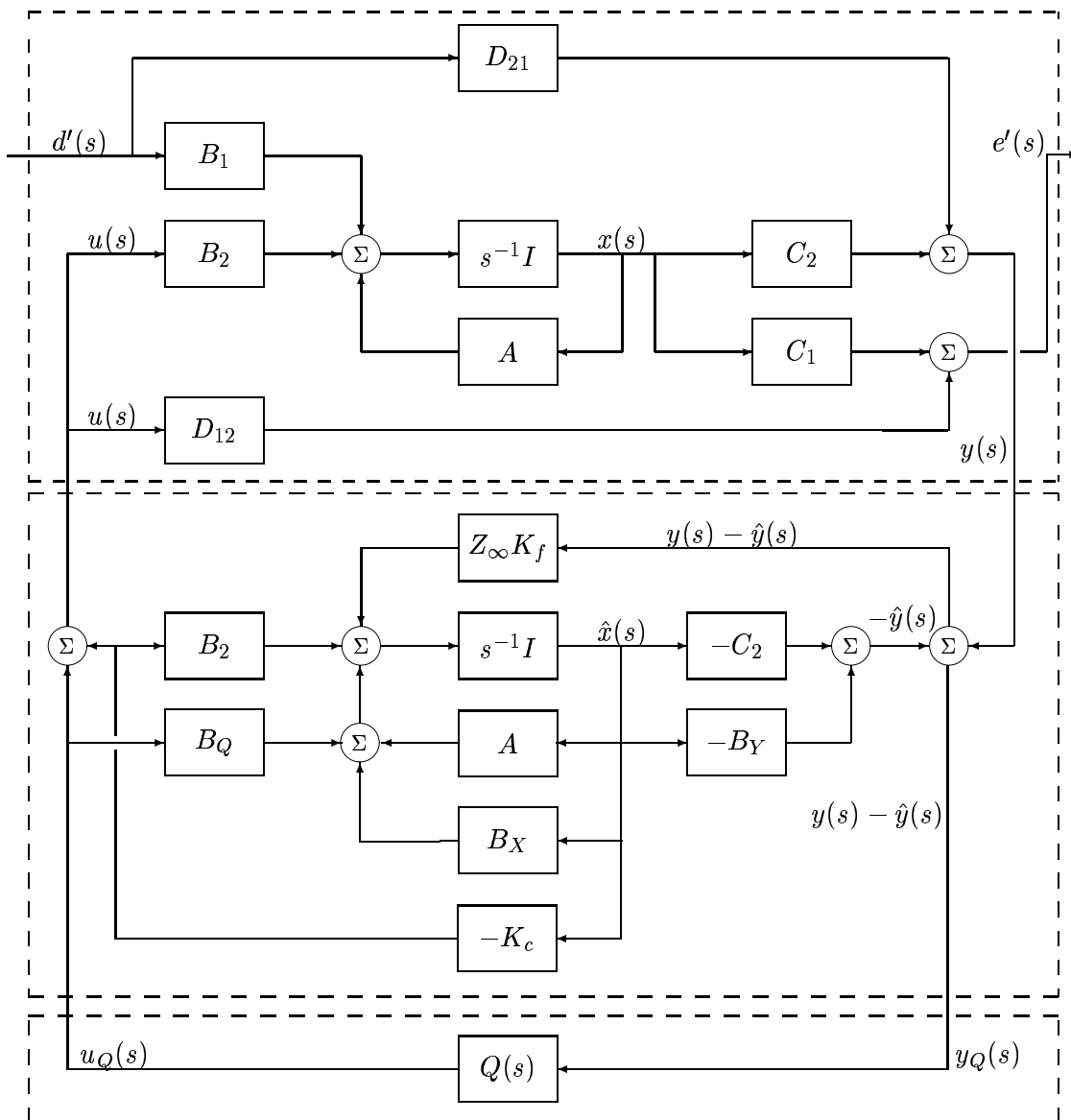
Desværre oplever man ofte, at formulere design problemer i 2×2 blok strukturen, der ikke opfylder (6.32). Dette er nok den væsentligste begrænsning i \mathcal{H}_∞ state-space løsningen. Der eksisterer efterhånden metoder, hvor betingelsen (6.32) er fjernet, men disse metoder er endnu ikke nemt tilgængelige. Som oftest kan man med rimelighed reformulere design problemet, således at (6.32) er opfyldt, men det betyder, at man skal passe på, når man formulerer 2×2 blok problemet.

Vi vil nu sammenligne strukturen af \mathcal{H}_∞ regulatoren med den velkendte LQG struktur. I Figur 6.4 er strukturen af LQG regulatoren illustreret og i Figur 6.5 det samme for \mathcal{H}_∞ regulatoren.



Figur 6.4: LQG regulator struktur som 2×2 blok problem. $N(s)$ er givet ved den øverste boks og LQG regulatoren ved den nederste boks.

Bemærk at \mathcal{H}_∞ regulatoren $F_l(J(s), Q(s))$ som LQG regulatoren er opdelt i en tilstandsestimator samt en tilstandstilbagekobling K_c . Modsat LQG regulatoren optræder en skalerings matrix Z_∞ i serie med forstærkningsmatricen K_f i tilstandsestimatoren og der er desuden et par extra led, nemlig $B_Y = \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty$, $B_X = \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty$ og $B_Q = Z_\infty (B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T D_{12})$. For den centrale regulator $Q(s) = 0$ falder leddet B_Q væk. Dermed kan vi se, at der er en stor lighed mellem LQG regulatoren og (den centrale) \mathcal{H}_∞ regulator. Rent faktisk kan det vises, se f.eks. [TCB95], at for $\gamma \rightarrow \infty$ går \mathcal{H}_∞ løsningen imod den tilsva-



Figur 6.5: \mathcal{H}_∞ suboptimal regulator struktur. $N(s)$ er givet ved den øverste boks, $J(s)$ ved den midterste boks og $Q(s)$ ved den nederste boks. $B_Q = Z_\infty(B_2 + \gamma^{-2}Y_\infty C_1^T D_{12})$, $B_Y = \gamma^{-2}D_{21}B_1^T X_\infty$ and $B_X = \gamma^{-2}B_1B_1^T X_\infty$.

rende LQG løsning. Derfor kan vi med en vis ret sige, at LQG løsningen er et specialtilfælde af \mathcal{H}_∞ løsningen. Hvis man sammenligner Hamilton matricerne for LQG:

$$H_X = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & -B_2 B_2^T \\ -C_1^T \tilde{D}_{12}^T \tilde{D}_{12} C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$H_Y = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & -C_2^T C_2 \\ -B_1 \tilde{D}_{21} \tilde{D}_{21}^T B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

og \mathcal{H}_∞ (se Ligning (6.17)-(6.18)) Riccati ligningerne ser man, at den eneste forskel er de

ekstra led $\gamma^{-2}B_1B_1^T$ og $\gamma^{-2}C_1C_1^T$ i øverste højre hjørne. LQG tilstandstilbagekoblingen K_c er *ikke* afhængig af B_1 , dvs. hvordan forstyrrelserne $d'(s)$ kommer ind i systemet. Modsat er \mathcal{H}_∞ løsningen afhængig af B_1 . Ligeledes er Kalman forstærkningen K_f i LQG tilstandsestimatoren *ikke* afhængig af C_1 , dvs. der lægges lige stor vægt på samtlige tilstande. Modsat er K_f i \mathcal{H}_∞ tilstandsestimatoren afhængig af C_1 , dvs. af hvilken linearkombination af tilstandene vi ser på outputtet $e'(s)$.

En af problemerne med LQG regulatoren er, at selvom LQ (fuld tilstandsinformation) har meget fine garanterede stabilitetsmarginer (∞ forstærkningsmargin og 60° fasemargin) så har det vist sig at den observerbaserede LQG regulator ofte *ikke* er særlig robust. Problemet er, at nogle tilstande ofte bidrager mere til forstærkningen end andre, men vi kan ikke kompensere for det i LQG Kalman filteret, fordi alle tilstande vægtes ens. I \mathcal{H}_∞ tilstandsestimatoren kan designeren imidlertid foretage denne vægtning gennem C_1 matricen og derved gøre designet mere robust. Ligeledes kan man vægte forstyrrelserne $d'(s)$ forskelligt når man beregner tilstandstilbagekoblingen og dermed øge ydeevne af systemet.

Der eksisterer nu kommercielt tilgængeligt software, som understøtter \mathcal{H}_∞ design problemet, f.eks. MATLAB toolboxene [CS92, BDG⁺93]. Begge disse toolboxe laver en iteration på γ for at finde den optimale \mathcal{H}_∞ regulator.

6.3.2 MATLAB Toolboxene

Der er ud over MATLAB Control toolboxen, 2 toolboxe til hjælp ved robust reguleringsdesign, nemlig:

- Robust Control Toolbox.
- μ -Analysis and Synthesis Toolbox.

Vi mener, at μ toolboxen er den første overlegen på flg. punkter:

- Fremragende hjælpefunktion til at omdanne 2×2 blok strukturer til tilstandsbeskrivelser (`sysic.m`).
- Mere naturlige funktioner til manipulation af systemer, f.eks. til at lukket sløjfer (`starp.m`).
- God behandling af μ .

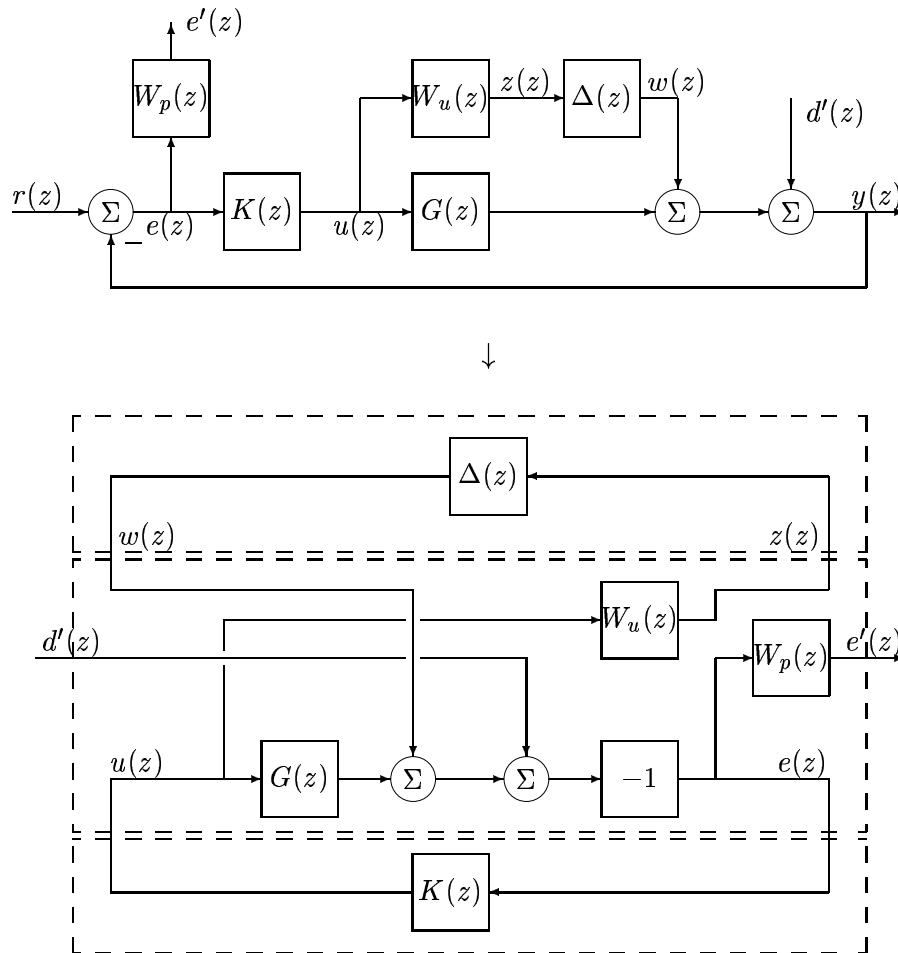
Desværre benytter μ toolboxen sig af en helt ny måde at repræsentere systemer på samt af mange nye datastrukturer, som det er nødvendigt at sætte sig ind i først. Herefter er de utroligt rare at arbejde med. Det medfører, at μ toolboxen *ikke* er særlig velegnet til et 1 moduls kursus i robust regulering.

Vi vil derfor nøjes med at beskrive robust toolboxen her. Vi vil illustrere de vigtigste funktioner gennem et lille eksempel, nemlig det tidligere introducerede pumpe-eksempel.

6.3.2.1 \mathcal{H}_∞ design for pumpen

Vi vil lave et \mathcal{H}_∞ optimalt design for pumpe-systemet ved hjælp af MATLAB Robust Control Toolboxen. I Figur 6.6 er design problemet illustreret, som det fremgår er problemet beskrevet

i diskret tid. Vi har en forstyrrelse $d'(z)$ på outputtet (uden vægt) samt et fejlsignal $e'(z)$, der er vægtet med den inverse af den øvre grænse for sensitiviteten $S_o(z)$. Vi har desuden en additiv modelusikkerhed, der medfører en øvre grænse på kontrolsensitiviteten. Der er altså tale om et blandet sensitivitets design.



Figur 6.6: Reguleringsdesign for pumpesystemet. Øverst er det vægtede system tegnet op og nederst er det tilsvarende 2×2 blok problem givet med $N(z)$ i den midterste boks.

Det første vi må gøre er, at omskrive problemet til et 2×2 blok problem. Det er ligeledes gjort i Figur 6.6. Herefter skal vi bestemme overføringsfunktionen $N(z)$. Udfra blokdiagrammet ses det let at:

$$\begin{bmatrix} z(z) \\ e'(z) \\ e(z) \end{bmatrix} = N(z) \begin{bmatrix} w(z) \\ d'(z) \\ u(z) \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_u(z) \\ -W_p(z) & -W_p(z) & -W_p(z)G(z) \\ -1 & -1 & -G(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(z) \\ d'(z) \\ u(z) \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

hvor

$$G(z) = \frac{0.1591z - 0.1500}{z^2 - 1.9200z + 0.9216} \quad (6.37)$$

$$W_u(z) = \frac{1.2076z^2 - 2.4013z + 1.1969}{z^2 - 1.9226z + 0.9241} \quad (6.38)$$

$$W_p(z) = \frac{z - 0.9512}{1.4125z - 1.4123} \quad (6.39)$$

Herefter skal vi finde en tilstands repræsentation for $N(z)$. Dette er ikke banalt, men vi kan sætte på fælles brøkstreg og anvende `tfm2ss.m` fra Robust Control Toolbox¹.

Da det er et diskrettidts \mathcal{H}_∞ problem vi skal løse er det selvfølgelig en diskrettidts \mathcal{H}_∞ algoritme vi skal bruge. Imidlertid kan man bruge bilinear transformation til kontinuert tid, løse problemet her og derefter transformere regulatoren tilbage til diskret tid. Dette kan lade sig gøre, da \mathcal{H}_∞ normen er invariant under bilinear transformation. Nu skal vi altså lave γ -iteration for at finde den \mathcal{H}_∞ optimale regulator. γ -iterationsalgoritmen i Robust Control toolboxen findes kun til kontinuert tid. Ergo må vi først explicit transformere $N(z)$ til kontinuert tid ved bilinear transformation:

```
[Ac,Bc,Cc,Dc] = d2cm(A,B,C,D,Ts,'tustin');
```

State-space matricerne for $N(s)$ skal herefter partitioneres efter de forskellige input. Da vi har 2 eksterne input ($w(s)$ og $d'(s)$), 1 styrbart input ($u(s)$), 2 eksterne output ($z(s)$ og $e'(s)$) samt 1 input til regulatoren ($e(s)$) fås flg. partitionering:

```
B1 = Bc(:,1:2); B2 = Bc(:,3);
C1 = Cc(1:2,:); C2 = Cc(3,:);
D11 = Dc(1:2,1:2); D12 = Dc(1:2,3);
D21 = Dc(3,1:2); D22 = Dc(3,3);
```

Vi kan nu anvende kommandoen `hinfopt.m` til at udføre γ -iterationen:

```
[gamopt,Ak,Bk,Ck,Dk,Ac1,Bc1,Cc1,Dc1] = hinfopt(Ac,B1,B2,C1,C2,D11,D12,D21,D22);
```

hvilket giver os flg. output på skærmen:

```
<< H-Infinity Optimal Control Synthesis >>
```

No	Gamma	D11<=1	P-Exist	P>=0	S-Exist	S>=0	lam(PS)<1	C.L.
1	1.0000e+00	OK	OK	FAIL	OK	OK	OK	UNST
2	5.0000e-01	OK	OK	OK	OK	OK	OK	STAB
3	7.5000e-01	OK	OK	OK	OK	OK	OK	STAB
4	8.7500e-01	OK	OK	OK	OK	OK	OK	STAB
5	9.3750e-01	OK	OK	FAIL	OK	OK	OK	UNST
6	9.0625e-01	OK	OK	OK	OK	OK	OK	STAB

¹Her er μ toolboxen meget nemmere at bruge.

7	9.2188e-01	OK	OK	FAIL	OK	OK	OK	UNST
8	9.1406e-01	OK	OK	FAIL	OK	OK	OK	UNST

Iteration no. 6 is your best answer under the tolerance: 0.0100 .
>

Det ser jo umiddelbart meget fint ud, idet vores optimale γ er 0.90625. Imidlertid anvender Robust Control toolboxen en invers udgave af γ , hvilket betyder at vores \mathcal{H}_∞ norm af lukket sløjfen er

$$\|F_l(N(s), K(s))\|_\infty = \frac{1}{0.90625} = 1.1034 \quad (6.40)$$

Ergo har vi ikke kunnet opnå robust ydeevne, selvom vi er ret tæt på. Vi skal transformere regulatoren tilbage til diskret tid:

```
[Adk,Bdk,Cdk,Ddk] = c2dm(Ak,Bk,Ck,Dk,Ts,'tustin');
```

Lad os herefter checke for nominal ydeevne, robust stabilitet og robust ydeevne. Først danner vi lukket sløjfen $F_l(N(z), K(z))$:

```
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = feedback(A,B,C,D,Adk,Bdk,Cdk,Ddk,3,3);
```

Vi kan nu checke på flg. vis:

```
% Robust stabilitet
B_rs = Bcl(:,1); C_rs = Ccl(1,:); D_rs = Dcl(1,1);
mag_rs = dbode(Acl,B_rs,C_rs,D_rs,Ts,1,w);

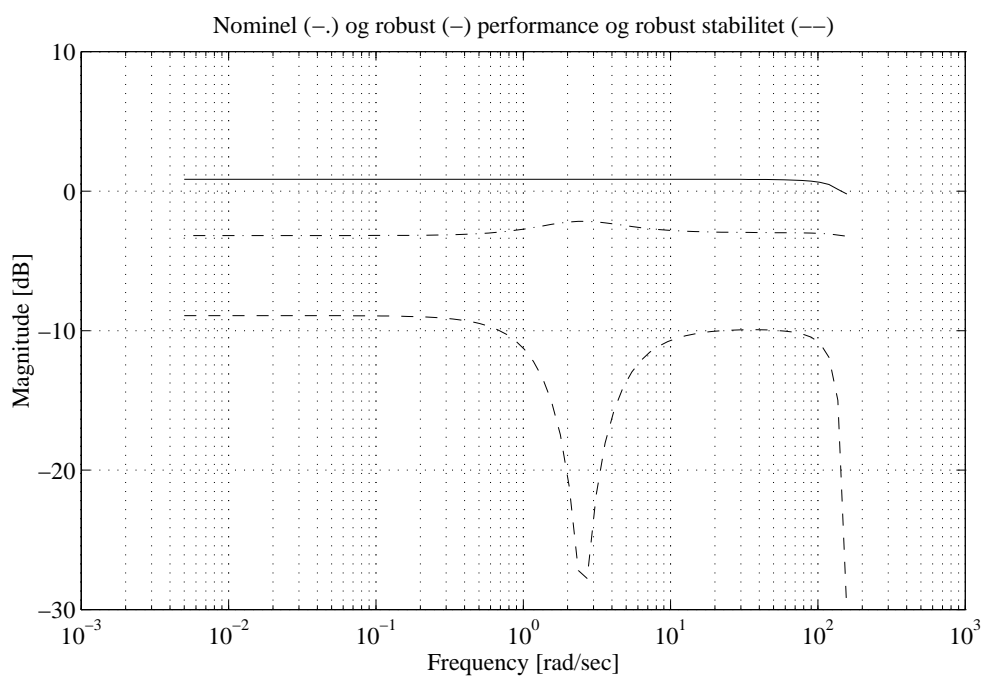
%Nominel ydeevne
B_np = Bcl(:,2); C_np = Ccl(2,:); D_np = Dcl(2,2);
mag_np = dbode(Acl,B_np,C_np,D_np,Ts,1,w);

%robust ydeevne
B_rp = Bcl(:,1:2); C_rp = Ccl(1:2,:); D_rp = Dcl(1:2,1:2);
sv_rp = dsigma(Acl,B_rp,C_rp,D_rp,Ts,w);

figure(1);
semilogx(w,20*log10(mag_rs),'--',w,20*log10(mag_np),'-.',w,20*log10(sv_rp(1,:)),'-');
title('Nominel (-.) og robust (-) ydeevne og robust stabilitet (--)');
xlabel('Frequency [rad/sec]'),ylabel('Magnitude [dB]');
axis([1e-3 1e3 -30 10]);
grid;
```

hvilket giver det i Figur 6.7 viste resultat:

Bemærk, at vi har opnået robust stabilitet samt nominal ydeevne, men ikke garanteret robust ydeevne. Læg desuden mærke til, at $\bar{\sigma}(F_l(N(e^{j\omega T_s}), K(e^{j\omega T_s})))$ er flad over frekvens, hvilket indikerer, at regulatoren er \mathcal{H}_∞ optimal. Desuden kan $\|F_l(N(z), K(z))\|_{\mathcal{H}_\infty}$ bestemmes til 1.1033, hvilket passer fint med den opnåede γ værdi.



Figur 6.7: Check for nominal ydeevne, robust stabilitet samt robust ydeevne med \mathcal{H}_∞ .

Kapitel 7

Robust regulator design med μ

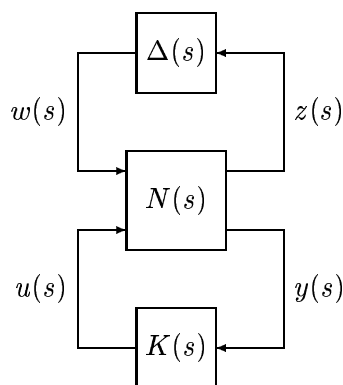
Der er to væsentlige begrænsninger i forbindelse med anvendelsen af \mathcal{H}_∞ teori til regulator-design. For det første kan vi kun analysere fuldt komplekse perturbationer $\Delta(s) \in \mathbf{C}^{n \times m}$ ikke-konservativt i en \mathcal{H}_∞ robust stabilitetstest. For det andet kan robust ydeevne problemet kun håndteres konservativt *selv for fuldt komplekse perturbationer* fordi stabilitet og ydeevne ikke kan separeres i \mathcal{H}_∞ strukturen. Konservatismen afhænger af usikkerhedsstrukturen samt af systemets konditionstal κ . I dette kapitel vil vi vise at disse begrænsninger kan undgås, hvis vi benytter *den strukturerede singularværdi μ* .

Vi vil først betragte analyseproblemet, dvs. hvordan man, givet en regulator $K(s)$, checker for robust stabilitet og robust ydeevne ved hjælp af μ . Derefter vil synteseproblemet blive behandlet, dvs. hvordan finder vi en regulator, der er optimal med hensyn til μ .

7.1 μ analyse

7.1.1 Robust stabilitet

Vi vil betragte reguleringsproblemer, der kan repræsenteres i blok diagram strukturen vist i Figur 7.1. Denne struktur vil vi benævne *$N\Delta K$ -strukturen*.



Figur 7.1: $N\Delta K$ formulering af robust stabilitetsproblem.

Ligheden mellem $N\Delta K$ og 2×2 blok strukturen er indlysende. Nu vil vi imidlertid ikke begrænse $\Delta(s)$ til at være en fuld kompleks blok. I stedet antages det at $\Delta(s)$ har en bestemt *blok-diagonal* struktur. Antag nemlig, at $\Delta(s)$ tilhører den begrænsede delmængde:

$$\mathbf{B}\Delta = \{\Delta(s) \in \Delta \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1\} \quad (7.1)$$

hvor Δ er defineret som:

$$\Delta = \left\{ \text{diag} \left(\delta_1^r I_{r_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{r_{m_r}}, \delta_1^c I_{r_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{r_{m_r+m_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{m_C} \right) \mid \delta_i^r \in \mathbf{R}, \delta_i^c \in \mathbf{C}, \Delta_i \in \mathbf{C}^{r_{m_r+m_c+i} \times r_{m_r+m_c+i}} \right\} \quad (7.2)$$

Vi betragter således reelle og komplekse perturbationer, som påvirker det nominelle system gennem $N\Delta K$ strukturen. Meget generelle robust stabilitetsproblemer kan formuleres gennem denne struktur, bl.a. parametrisk usikkerhed, se Eksempel 7.1. Det er klart, at blok-diagonal strukturen på $\Delta(s)$ tillader os at anvende meget mere detaljerede usikkerhedsmodeller, end hvis $\Delta(s)$ simpelthen er én fuld kompleks blok. Bemærk, at en fuld kompleks blok selvfølgelig blot er et specialtilfælde af mængden Δ .

Eksempel 7.1 (Diagonal perturbationsformulering I)

Dette eksempel er en let modificeret udgave af et eksempel givet i [Hol94]. Antag, at systemet $G(s)$ er givet ved:

$$G(s) = \frac{\alpha}{\beta s + 1} \quad (7.3)$$

hvor DC forstærkningen α og tidskonstanten β kun kendes med 10% usikkerhed:

$$\alpha = [27.0, 33.0], \quad \beta = [0.9, 1.1] \quad (7.4)$$

Vi vil udtrykke α og β ved deres nominelle værdi samt to perturbationer Δ_α og Δ_β for hvilke $|\Delta_{\alpha,\beta}| \leq 1$. Dette kan f.eks. opnås med:

$$\alpha = 30 \left(1 + \frac{1}{10} \Delta_\alpha \right) \quad (7.5)$$

$$\beta = 1.0 \left(1 + \frac{1}{10} \Delta_\beta \right) \quad (7.6)$$

hvor

$$\Delta_\alpha \in [-1, +1], \quad \Delta_\beta \in [-1, +1] \quad (7.7)$$

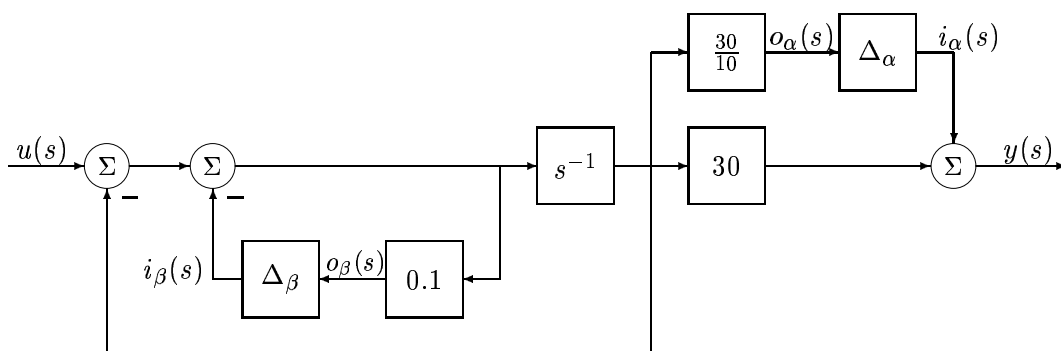
Lad $\mathbf{B}\Delta$ betegne mængden $[-1, +1]$. Så kan overføringsfunktionen $G(s)$ skrives:

$$G(s) = \frac{30(1 + 0.1\Delta_\alpha)}{(1 + 0.1\Delta_\beta)s + 1} \quad (7.8)$$

med

$$\Delta_\alpha, \Delta_\beta \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.9)$$

På blok-diagram form kan $G(s)$ repræsenteres som i Figur 7.2 på næste side.



Figur 7.2: Eksempel 7.1: Blok-diagram repræsentation af $G(s)$.

For at bestemme $N\Delta K$ formuleringen fjernes Δ blokkene i Figure 7.2 og overføringsfunktionerne fra de tre input $i_\alpha(s)$, $i_\beta(s)$ og $u(s)$ til de tre output $o_\alpha(s)$, $o_\beta(s)$ og $y(s)$ bestemmes. Standard blok-diagram manipulation giver på matrix form:

$$\begin{bmatrix} o_\alpha(s) \\ o_\beta(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{30}{10(s+1)} & \frac{30}{10(s+1)} \\ 0 & -\frac{s}{10(s+1)} & \frac{s}{10(s+1)} \\ 1 & -\frac{30}{s+1} & \frac{30}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(s) \\ i_\beta(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Usikkerhedsblokkene er givet ved:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha(s) \\ i_\beta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha o_\alpha(s) \\ \Delta_\beta o_\beta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha & 0 \\ 0 & \Delta_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o_\alpha(s) \\ o_\beta(s) \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Lad herefter $w(s)$, $z(s)$, $N(s)$ og $\Delta(s)$ være givet ved:

$$w(s) = \begin{bmatrix} i_\alpha(s) \\ i_\beta(s) \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$z(s) = \begin{bmatrix} o_\alpha(s) \\ o_\beta(s) \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{30}{10(s+1)} & \frac{30}{10(s+1)} \\ 0 & -\frac{s}{10(s+1)} & \frac{s}{10(s+1)} \\ 1 & -\frac{30}{s+1} & \frac{30}{s+1} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_\alpha, \Delta_\beta\} = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha & 0 \\ 0 & \Delta_\beta \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Det perturberede system er nu beskrevet ved:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$w(s) = \Delta(s)z(s) \quad (7.17)$$

og kan umiddelbart puttes ind i $N\Delta K$ strukturen.

Eksempel 7.2 (Diagonal perturbationsformulering II)

Lad os herefter betragte et standard anden ordens system:

$$G(s) = \frac{\alpha\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (7.18)$$

Antag at forstærkningen α , dæmpningsfaktoren ζ samt egensvingningsfrekvensen ω_n ikke er kendt med fuldstændig nøjagtighed, men kun således at

$$\alpha = \alpha_o(1 + \delta_\alpha\Delta_\alpha) \quad (7.19)$$

$$\zeta = \zeta_o(1 + \delta_\zeta\Delta_\zeta) \quad (7.20)$$

$$\omega_n = \omega_{n_o}(1 + \delta_\omega\Delta_\omega) \quad (7.21)$$

hvor

$$\Delta_\alpha, \Delta_\zeta, \Delta_\omega \in \mathbf{B}\Delta \quad \mathbf{B}\Delta = [-1; +1] \quad (7.22)$$

α_o , ζ_o og ω_{n_o} er således de nominelle værdier og δ_α , δ_ζ og δ_ω den relative usikkerhed.

En overføringsfunktionsrepræsentation af $G(s)$ er givet i Figur 7.3 på den følgende side. Grundet den øgede kompleksitet i forhold til 1. ordens systemet i Eksempel 7.1 på side 76 er det fordelagtigt at arbejde med tilstandsrepræsentationer. Definér tilstandene som:

$$x_1 = \dot{y}, \quad x_2 = y \quad (7.23)$$

Det kan da vises, at en tilstandsrepræsentation for $G(s)$ er givet ved:

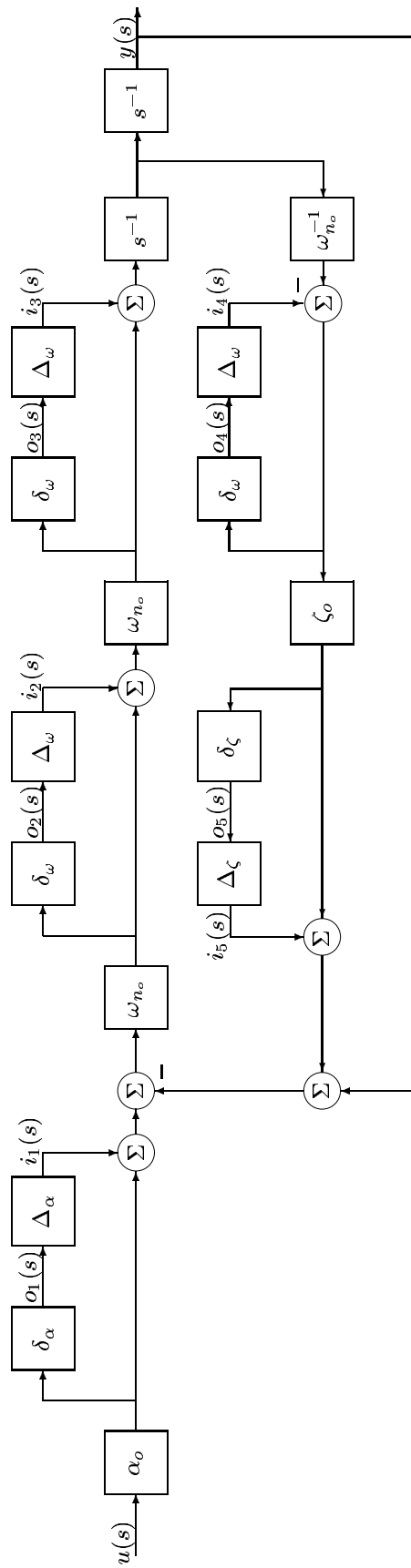
$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} -2\zeta_o\omega_{n_o} & -\omega_{n_o}^2 & \omega_{n_o}^2 & \omega_{n_o} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\delta_\omega\zeta_o & -\delta_\omega\omega_{n_o} & \delta_\omega\omega_{n_o} & 0 & 0 \\ -2\delta_\omega\zeta_o\omega_{n_o} & -\delta_\omega\omega_{n_o}^2 & \delta_\omega\omega_{n_o}^2 & \delta_\omega\omega_{n_o} & 0 \\ \delta_\omega\omega_{n_o}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\delta_\zeta\zeta_o\omega_{n_o}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 2\zeta_o\omega_{n_o}^2 & -\omega_{n_o}^2 & \alpha\omega_{n_o}^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\delta_\alpha \\ 2\delta_\omega\zeta_o\omega_{n_o} & -\delta_\omega\omega_{n_o} & \delta_\omega\alpha\omega_{n_o} \\ 2\delta_\omega\zeta_o\omega_{n_o}^2 & -\delta_\omega\omega_{n_o}^2 & \delta_\omega\alpha\omega_{n_o}^2 \\ \delta_\omega & 0 & 0 \\ -2\delta_\zeta\zeta_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.24)$$

Idet vi herefter går frem som i Eksempel 7.1 på side 76, definér

$$w(s) = [i_1(s) \ i_2(s) \ i_3(s) \ i_4(s) \ i_5(s)]^T \quad (7.25)$$

$$z(s) = [o_1(s) \ o_2(s) \ o_3(s) \ o_4(s) \ o_5(s)]^T \quad (7.26)$$

$$\Delta(s) = \text{diag} \{ \Delta_\alpha, \Delta_\omega, \Delta_\omega, \Delta_\omega, \Delta_\zeta \} \quad (7.27)$$



Figur 7.3: Perturberet anden ordens system på overføringsfunktionform.

Så er det perturberede 2. ordens system givet ved:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

$$w(s) = \Delta(s)z(s) \quad (7.29)$$

og kan umiddelbart puttes ind i $N\Delta K$ strukturen. Bemærk, at i dette tilfælde indeholder blokstrukturen for $\Delta(s)$ gentagne skalære blokke:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Generelt kan der for et vilkårligt usikkert system opstilles adskillige ækvivalente $N\Delta K$ formuleringer, der kan indeholde forskellige $\Delta(s)$ strukturer. Det kan være vanskeligt at bestemme en **minimal** formulering, hvor størrelsen af $\Delta(s)$ er mindst mulig.

Som illustreret gennem de to ovenstående eksempler kan meget strukturerede usikkerhedsmodeller repræsenteres i $N\Delta K$ strukturen. Desværre kan ekstraktionen af usikkerhedsblokkene involvere en del kedsommelig algebra. Heldigvis findes der, i MATLAB μ -Toolboxen, en meget handy **m**-funktion (`sysic.m`), der kan automatisere denne proces.

Dynamisk usikkerhed kan også inkluderes gennem komplekse blokke af passende størrelse.

Lad nu $F_l(N(s), K(s)) = P(s)$ betegne overføringsfunktionen opnået ved at lukke den nederste sløjfe i Figur 7.1 på side 75. $P(s)$ er den *generaliserede lukket-sløjfe overføringsfunktion* og er givet ved:

$$P(s) = F_l(N(s), K(s)) \quad (7.31)$$

$$= N_{11}(s) + N_{12}(s)K(s)(I - N_{22}(s)K(s))^{-1}N_{21}(s) \quad (7.32)$$

Robust stabilitet givet en struktureret usikkerhed $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$ er da bestemt ved den følgende sætning, som er en generalisering af \mathcal{H}_∞ robust stabilitetsætningen (se Sætning 5.2 på side 51).

Sætning 7.1 *Antag, at systemet $P(s)$ er stabilt, samt at perturbationen $\Delta(s)$ er af en sådan form, at den perturberede lukket-sløjfe er stabil hvis og kun hvis Nyquist kurven for $\det(I - P(s)\Delta(s))$ ikke omslutter origo. Så er lukket-sløjfen i Figur 7.1 på side 75 stabil for samtlige perturbationer $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$ hvis og kun hvis*

$$\det(I - P(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall \Delta(j\omega) \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.33)$$

$$\Leftrightarrow \rho(P(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega, \forall \Delta(j\omega) \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.34)$$

$$\Leftarrow \bar{\sigma}(P(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \quad (7.35)$$

Bevis for Sætning 7.1 Beviset følger umiddelbart af \mathcal{H}_∞ robust stabilitetsætningen, Sætning 5.2 på side 51 med $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$. \square

Bemærk, at (7.35) kun er en tilstrækkelig betingelse for robust stabilitet. Nødvendigheden af den tilsvarende betingelse for ustrukturerede usikkerheder følger af det faktum, at den ustrukturerede mængde indeholder *alle* $\Delta(s)$ med $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$. Nu begrænser vi imidlertid perturbationsmængden til $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$ og derfor er betingelsen (7.35) generelt arbitrært

konservativ. I stedet for en singularværdi robust stabilitetsbetingelse har vi brug for noget, der taget hensyn til strukturen af perturbationen $\Delta(s)$. Dette er præcist den strukturerede singularværdi μ .

Givet en matrix $P \in \mathbf{C}^{n \times m}$ er den positive reelle funktion μ defineret ved:

$$\mu_{\Delta}(P) \triangleq \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \det(I - P\Delta) = 0\}} \quad (7.36)$$

undtagen hvis ingen $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ gør $I - P\Delta$ singular ($\det(I - P\Delta) = 0$); i dette tilfælde er $\mu_{\Delta}(P) = 0$. Ergo er $1/\mu_{\Delta}(P)$ "størrelsen" af den mindste perturbation Δ , målt ved dens største singularværdi $\bar{\sigma}(\Delta)$, som gør $I - P\Delta$ singular. Hvis $P(s)$ er en overføringsmatrix kan vi fortolke $1/\mu_{\Delta}(P(j\omega))$ som størrelsen af den mindste perturbation, der flytter de karakteristiske loci for $P(s)$ over i Nyquist punktet $(-1, 0)$ ved frekvensen ω .

Fra definitionen af μ samt Sætning 7.1 på foregående side kan vi nu opstille følgende sætning for bestemmelse af robust stabilitet, se også [DP87, PD93]:

Sætning 7.2 (Robust stabilitet med μ) *Antag, at systemet $P(s)$ er stabilt, samt at perturbationen $\Delta(s)$ er af en sådan form, at den perturberede lukket-sløjfe er stabil hvis og kun hvis Nyquist kurven for $\det(I - P(s)\Delta(s))$ ikke omslutter origo. Så er lukket-sløjfen i Figur 7.1 på side 75 stabil for samtlige perturbationer $\Delta(s) \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta}$ hvis og kun hvis*

$$\|\mu_{\Delta}(P(s))\|_{\infty} \leq 1 \quad (7.37)$$

hvor:

$$\|\mu_{\Delta}(P(s))\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} \mu_{\Delta}(P(j\omega)) \quad (7.38)$$

7.1.2 Robust ydeevne

For at kunne analysere for robust ydeevne inkluderer vi de normaliserede eksterne forstyrrelser $d'(s)$ samt de normaliserede fejlsignaler $e'(s)$ i $N\Delta K$ formuleringen. Vi kan da opstille et generelt værktøj til analyse og design af lineære systemer, se Figur 7.4 på næste side. Enhver lineær kombination af kontrol input u , målte output y , forstyrrelser d' , fejlsignaler e' , perturbationer w samt regulator K kan beskrives ved hjælp af dette "generiske" system.

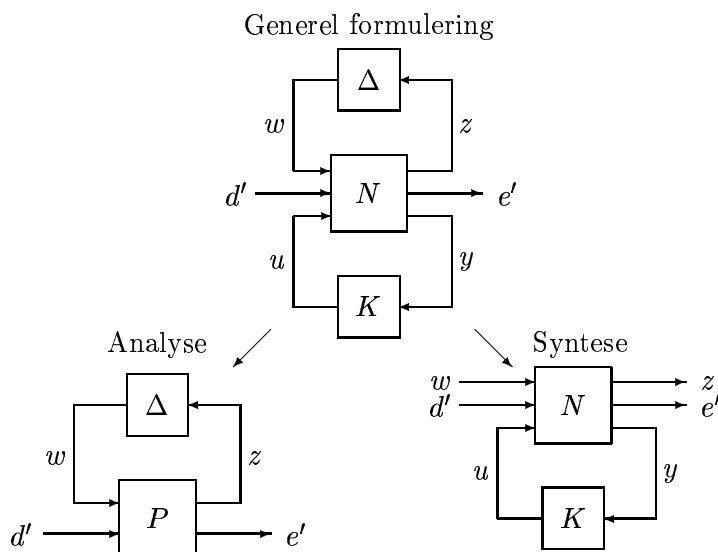
Inden for dette system kan analyse og design ses som 2 specialtilfælde, se Figur 7.4 på den følgende side. Som ved 2×2 blok problemet er skaleringer og vægtfunktioner absorberet i overføringsfunktionen $N(s)$, således at $d'(s)$, $e'(s)$ og $\Delta(s)$ er normaliseret til norm 1. Bemærk, at hvis vi opdeler $P(s)$ i 4 blokke, der er konsistente med dimensionen af de 2 input w og d' samt de 2 output z og e' kan vi identificere $P_{11}(s)$ som overføringsmatricen $P(s)$ i Sætning 7.2.

I forbindelse med analyse af robust ydeevne er vi interesseret i overføringsfunktionen fra $d'(s)$ til $e'(s)$. Denne overføringsfunktion er givet ved:

$$e'(s) = F_u(P(s), \Delta(s))d'(s) \quad (7.39)$$

$$= \left[P_{22}(s) + P_{21}(s)\Delta(s) (I - P_{11}(s)\Delta(s))^{-1} P_{12}(s) \right] d'(s) \quad (7.40)$$

I (7.40) er $P_{22}(s)$ den vægtede nominelle ydeevne funktion (typisk output sensitiviteten), hvorfor $F_u(P(s), \Delta(s))$ således er den vægtede perturberede ydeevne funktion. Vores robuste



Figur 7.4: Et generelt værktøj for analyse samt regulatordesign for lineære systemer.

ydeevnemål kan nu formuleres fra Ligning (7.40) på forrige side som:

$$\|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(F_u(P(j\omega), \Delta(j\omega))) < 1 \quad \forall \Delta(j\omega) \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.41)$$

Bemærk, at vores betingelse for robust ydeevne er udtrykt som en singularværdi begrænsning, ligedan med en robust stabilitetsbetingelse for ustruktureret usikkerhed. Vi kan derfor konkludere, at *den robuste ydeevne-betingelse (7.41) er opfyldt, hvis og kun hvis systemet $F_u(P(s), \Delta(s))$ er robust stabilt overfor en normbegrænset perturbation $\Delta_p(s)$ med $\bar{\sigma}(\Delta_p(j\omega)) \leq 1, \forall \omega$* . Ergo, ved at udvide perturbationsstrukturen med en fuld kompleks “ydeevne-blok” $\Delta_p(s)$ kan vi checke for robust ydeevne gennem en ustruktureret robust stabilitetsbetingelse. Endvidere kan denne udvidelse af perturbationsstrukturen foretages helt naturligt med μ , fordi den tilladte struktur netop er blok-diagonal.

Vi har nu den følgende sætning til vurdering af robust ydeevne, se også [DP87, PD93]:

Sætning 7.3 (Robust ydeevne med μ) *Lad ydeevnekrav være givet gennem en \mathcal{H}_∞ specifikation på overføringsmatricen fra $d'(s)$ til $e'(s)$ – typisk en vægtet sensitivitets-specifikation – af formen:*

$$\|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(F_u(P(j\omega), \Delta(j\omega))) < 1 \quad (7.42)$$

Så er den perturberede lukketsløjfe $F_u(P(s), \Delta(s))$ stabil og opfylder ydeevne-specifikationen $\|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1, \forall \Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$ hvis og kun hvis:

$$\|\mu_{\tilde{\Delta}}(P(s))\|_{\infty} \leq 1 \quad (7.43)$$

hvor perturbationsstrukturen er udvidet med en fuld kompleks ydeevne-blok:

$$\tilde{\Delta} = \left\{ \text{diag}(\Delta, \Delta_p) \mid \Delta \in \mathbf{\Delta}, \Delta_p \in \mathbf{C}^{k \times k} \right\} \quad (7.44)$$

Sætning 7.3 er en af grundene til, at det er populært at måle ydeevne ved hjælp af \mathcal{H}_∞ -normen. Hvis usikkerheden begrænses ved den største singularværdi, er det nemlig muligt, gennem μ , at checke for robust stabilitet *og robust ydeevne* på en ikke-konservativ måde. Hvis modelusikkerheden er modelleret præcist, dvs. hvis alle systemer $G_\Delta(s) \in \mathcal{G}$ kan optræde i praksis, så er μ betingelsen for robust ydeevne både nødvendig og tilstrækkelig. Altså giver μ sætningerne mindre konservative betingelser for robust ydeevne sammenlignet med de tilsvarende \mathcal{H}_∞ betingelser. Stabilitet og ydeevne kan separeres, langt mere detaljerede usikkerhedsbeskrivelser kan formuleres på grund af den diagonale struktur på Δ og vi opnår ikke-konservative betingelser for robust ydeevne selv for dårligt konditionerede systemer ($\kappa(G(j\omega)) \gg 1$).

Ligning (7.43) på foregående side giver en simpel test for robust ydeevne. Hvis vi plotter $\mu_{\tilde{\Delta}}(P(j\omega))$ mod frekvens er det nemt at checke hvorvidt betingelsen (7.43) i Sætning 7.3 på forrige side er opfyldt.

Idet $\Delta_1 = \text{diag}\{\Delta, 0\}$ og $\Delta_2 = \text{diag}\{0, \Delta_p\}$ er specialtilfælde af den generelle struktur $\Delta \in \tilde{\Delta}$ er det klart at:

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(P(j\omega)) \geq \max\{\mu_{\Delta_1}(P_{11}(j\omega)), \mu_{\Delta_2}(P_{22}(j\omega)) = \bar{\sigma}(P_{22}(j\omega))\} \quad (7.45)$$

hvilket betyder, at en nødvendig betingelse for robust ydeevne er, at lukket-sløjfen er robust stabil samt, at det nominelle system opfylder ydeevne kravene.

7.1.3 Beregning af μ

Som illustreret overfor er μ et meget nyttigt værktøj til bestemmelse af robust stabilitet og ydeevne i forbindelse med både struktureret og ustruktureret usikkerhed. Desværre er selve udregningen af μ et meget kompliceret problem, som der ikke findes nogen generel matematisk løsning på. Problemet er, at Ligning (7.36) på side 81 ikke direkte kan bruges til udregning af μ , fordi optimeringsproblemet generelt har flere lokale maksima [DP87, FTD91]. Imidlertid kan vi udlede øvre og nedre grænser for μ både for rent komplekse perturbationsmængder ($m_r = 0$ i Ligning (7.2) på side 76) samt for blandede reelle og komplekse perturbationsmængder. Algoritmer til beregning af disse grænser var genstand for intens forskning i begyndelsen af 1990'erne, se bl.a. [DP87, YND91]. I det følgende vil vi kort redegøre for nogle af disse grænser. For ikke at gøre notationen mere indviklet end højst nødvendigt vil vi antage, at det generaliserede system $P(s)$ er kvadratisk, $P(s) \in \mathbf{C}^{n \times n}$.

7.1.3.1 μ med komplekse perturbationer

Lad os først betragte beregning af μ , når perturbationsstrukturen udelukkende består af komplekse blokke, dvs. $m_r = 0$ i (7.2) på side 76. Det kan da rimeligt nemt vises, at $\mu_{\Delta}(P)$ er givet ved standardfunktioner, når Δ er et af de følgende 2 mængder, se f.eks. [ZDG96]:

- Hvis $\Delta = \{\delta^c I_n \mid \delta^c \in \mathbf{C}\}$ ($m_r = 0$, $m_c = 1$, $m_C = 0$ i (7.2)), så er $\mu_{\Delta}(P) = \rho(P)$, spektral radius af P (den numerisk største egenværdi af P , $\rho(P) = \max_i |\lambda_i(P)|$).
- Hvis $\Delta = \{\Delta \mid \Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}\}$ ($m_r = 0$, $m_c = 0$, $m_C = 1$ i (7.2)), så er $\mu_{\Delta}(P) = \bar{\sigma}(P)$, den største singularværdi.

For en generel kompleks perturbation Δ gælder at

$$\{\delta^c I_n \mid \delta^c \in \mathbf{C}\} \subset \Delta \subset \{\Delta \mid \Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}\} \quad (7.46)$$

Derfor gælder det, at:

$$\rho(P) \leq \mu_{\Delta}(P) \leq \bar{\sigma}(P) \quad (7.47)$$

Imidlertid er disse grænser utilstrækkelige, idet forskellen imellem $\rho(P)$ og $\bar{\sigma}(P)$ kan være vilkårlig stor. Ergo må grænserne i Ligning (7.47) forfines. Dette kan gøres gennem transformationer af P som *ikke påvirker* $\mu_{\Delta}(P)$ men derimod modificerer $\rho(P)$ og $\bar{\sigma}(P)$. Definér følgende delmængder af $\mathbf{C}^{n \times n}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ Q \in \Delta \mid m_r = 0, \delta_i^{c^*} \delta_i^c = 1, \Delta_i^* \Delta_i = I_{r_{m_c+i}} \right\} \quad (7.48)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \text{diag} \left(D_1, \dots, D_{m_c}, d_1 I_{r_{m_c+1}}, \dots, d_{m_C} I_{r_{m_c+m_C}} \right) \right. \\ \left. \mid D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i^* = D_i > 0, d_i \in \mathbf{R}, d_i > 0 \right\} \quad (7.49)$$

Det kan nu vises, se f.eks. det originale paper om μ af Doyle [Doy82], at for enhver $\Delta \in \Delta$ (for hvilken $m_r = 0$), $Q \in \mathbf{Q}$ og $D \in \mathbf{D}$ gælder der, at:

$$Q^* \in \mathbf{Q}, \quad Q\Delta \in \Delta, \quad \Delta Q \in \Delta, \quad \bar{\sigma}(Q\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta Q) = \bar{\sigma}(\Delta), \quad (7.50)$$

$$D\Delta = \Delta D \quad (7.51)$$

Fra (7.50) og (7.51) kan den følgende sætning udledes.

Sætning 7.4 (Øvre og nedre grænser for μ) For alle $Q \in \mathbf{Q}$ og $D \in \mathbf{D}$ gælder

$$\mu_{\Delta}(PQ) = \mu_{\Delta}(QP) = \mu_{\Delta}(P) = \mu_{\Delta}(DPD^{-1}) \quad (7.52)$$

Ergo kan grænserne i Ligning (7.47) forbedres til:

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP) \leq \mu_{\Delta}(P) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1}) \quad (7.53)$$

Den nedre grænse $\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP)$ er i virkeligheden en identitet ($\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP) = \mu_{\Delta}(P)$), men desværre er funktionen $\rho(QP)$ ikke konveks, men har generelt adskillige lokale maksima. Således kan en numerisk søgealgoritme ikke garantere at finde μ , men kun give en nedre grænse. På den anden side er udregningen af den øvre grænse et konvekst problem, hvorfor det globale minimum $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1})$ i princippet altid kan bestemmes. Desværre er den øvre grænse *ikke* altid lig med μ . Det kan vises, at for specielt simple perturbationsstrukturer, nemlig for $m_r = 0$ og $2m_c + m_C \leq 3$, er den øvre grænse altid lig med μ . For strukturer med $2m_c + m_C > 3$ vil der imidlertid for de fleste matricer P , gælde at μ er mindre end $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1})$. Numerisk erfaring med den øvre grænse indikerer på den anden side, at selv for $2m_c + m_C > 3$ er den øvre grænse normalt ikke specielt konservativ.

Med MATLAB *μ -Analysis and Synthesis Toolboxen* [BDG⁺93] eksisterer der idag kommercielt tilgængeligt software, der kan beregne grænserne i Sætning 7.4. I forbindelse med praktisk regulator design (i det mindste for rent komplekse perturbationer) synes de matematiske problemer forbundet med udregningen af μ derfor at være forholdsvis teoretiske.

7.1.3.2 μ med blandede perturbationer

Løsningen af det blandede¹ μ problem har været genstand for intensiv forskning gennem de sidste 10 år, se f.eks. [FTD91, YND91, YND92, You93]. Vi vil ikke behandle beregningen af grænserne for blandet μ i detaljer i denne note (en reference er [You93]), men blot give nogle af de vigtigste resultater. Lad os definere følgende mængder:

$$\mathbf{Q} = \left\{ Q \in \mathbf{\Delta} \mid \delta_i^r \in [-1; 1], \delta_i^c \delta_i^c = 1, \Delta_i^* \Delta_i = I_{r_{m_r+m_c+i}} \right\} \quad (7.54)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \text{diag} (D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{r_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{r_m}) \mid D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i^* = D_i > 0, d_i \in \mathbf{R}, d_i > 0 \right\} \quad (7.55)$$

$$\mathbf{G} = \left\{ \text{diag} (G_1, \dots, G_{m_r}, O_{r_{m_r+1}}, \dots, O_{r_m}) \mid G_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, G_i = G_i^* \right\} \quad (7.56)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \left\{ \text{diag} (D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{r_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{r_m}) \mid D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, \det(D_i) \neq 0, d_i \in \mathbf{C}, d_i \neq 0 \right\} \quad (7.57)$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \left\{ \text{diag} (g_1, \dots, g_{n_r}, O_{n_c}) \mid g_i \in \mathbf{R} \right\} \quad (7.58)$$

hvor $r_m = r_{m_r+m_c+m_c}$, $n_r = \sum_{i=1}^{m_r} r_i$ og $n_c = n - n_r$. Bemærk, at for overensstemmelse med $P(s)$ må vi have, at $\sum_{i=1}^m r_i = n$.

Vi har da følgende øvre og nedre grænser for blandet μ :

Sætning 7.5 (Øvre og nedre grænser for blandet μ [FTD91]) *Lad $\bar{\lambda}_R$ være den største reelle egen værdi og lad $\rho_R(P)$ være den reelle spektral radius af P :*

$$\rho_R(P) \triangleq \max \{ |\lambda_R(P)| : \lambda_R(P) \text{ er en reel egen værdi af } P \} \quad (7.59)$$

Hvis P ikke har nogen reelle egen værdier er $\rho_R(P) = 0$. Antag endvidere, at α_ er resultatet af minimeringsproblemet:*

$$\alpha_* = \inf_{D \in \mathbf{D}, G \in \mathbf{G}} \min_{\alpha \in \mathbf{R}} \{ \alpha \mid \bar{\lambda}_R (P^* D P + j (G P - P^* G) - \alpha D) \leq 0 \} \quad (7.60)$$

Så er:

$$\rho_R(P) \leq \mu_{\mathbf{\Delta}}(P) \leq \sqrt{\max(0, \alpha_*)} \quad (7.61)$$

Bemærk, at beregningen af den øvre grænse (7.60) involverer en Lineær Matrix Ulighed (LMI). Der eksisterer forskellige numeriske metoder til at tackle sådanne minimeringer. Imidlertid kræver dette, selv for forholdsvis begrænsede problemer ($n \leq 100$), optimering over skaleringer D og G , som kan indeholde adskillige tusinde parametre. Behandlingen af sådanne problemer med fornuftige udregningstider kræver derfor, at selve strukturen af det blandede μ problem udnyttes i højere grad, se f.eks. [YND92]. Forskellige reformuleringer af øvre grænse problemet er givet i Sætning 7.6 på næste side.

¹Vi vil ofte referere til det blandede reelle og komplekse μ problem simpelthen som det blandede μ problem.

Sætning 7.6 (Reformulering af blandet μ øvre grænse) Antag, at vi har en matrix $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$ samt en reel positiv skalar $\beta > 0$. Lad endvidere for ethvert $D \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $P_D = DPD^{-1}$. Så er følgende ækvivalent:

1. Der eksisterer matrixer $D_1 \in \mathbf{D}$ og $G_1 \in \mathbf{G}$ således, at:

$$\bar{\lambda}_R(P^* D_1 P + j(G_1 P - P^* G_1) - \beta^2 D_1) \leq 0 \quad (7.62)$$

2. Der eksisterer matrixer $D_2 \in \mathbf{D}$ og $G_2 \in \mathbf{G}$ (eller $D_2 \in \hat{\mathbf{D}}$ og $G_2 \in \hat{\mathbf{G}}$) således, at:

$$\bar{\lambda}_R(P_{D_2}^* P_{D_2} + j(G_2 P_{D_2} - P_{D_2}^* G_2)) \leq \beta^2 \quad (7.63)$$

3. Der eksisterer matrixer $D_3 \in \mathbf{D}$ og $G_3 \in \mathbf{G}$ (eller $D_3 \in \hat{\mathbf{D}}$ og $G_3 \in \hat{\mathbf{G}}$) således, at:

$$\bar{\sigma} \left[\left(\frac{P_{D_3}}{\beta} - jG_3 \right) (I + G_3^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \leq 1 \quad (7.64)$$

4. Der eksisterer matrixer $D_4 \in \mathbf{D}$ og $G_4 \in \mathbf{G}$ (eller $D_4 \in \hat{\mathbf{D}}$ og $G_4 \in \hat{\mathbf{G}}$) således, at:

$$\bar{\sigma} \left[(I + G_4^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{P_{D_4}}{\beta} - jG_4 \right) (I + G_4^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \leq 1 \quad (7.65)$$

Bevis for Sætning 7.6 kan findes i [You93]. Ved at anvende Sætning 7.6 kan vi nemt finde alternative formuleringer for den blandede μ øvre grænse. For eksempel er den øvre grænse, der er implementeret i MATLAB μ toolboxen udledt af Ligning (7.65). Definér β^* som:

$$\beta^* = \inf_{\beta \in \mathbf{R}_+, G \in \hat{\mathbf{G}}, D \in \hat{\mathbf{D}}} \{ \beta \mid \bar{\sigma}(P_{DG}) \leq 1 \} \quad (7.66)$$

hvor P_{DG} er givet som:

$$P_{DG} = (I + G^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{DPD^{-1}}{\beta} - jG \right) (I + G^2)^{-\frac{1}{4}} \quad (7.67)$$

Så er

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP) \leq \mu_{\Delta}(P) \leq \beta^* \quad (7.68)$$

7.2 μ syntese

I forbindelse med regulator design kan overføringsfunktionen $F_l(N, K)$ fra $[w, d']^T$ to $[z, e']^T$ opdeles som:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ e'(s) \end{bmatrix} = F_l(N(s), K(s)) \begin{bmatrix} w(s) \\ d'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(s) + N_{12}(s)K(s) (I - N_{22}(s)K(s))^{-1} N_{21}(s) \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ d'(s) \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Bemærk, at $F_l(N(s), K(s)) = P(s)$. Hvis vi anvender Sætning 7.3 på side 82, ses det, at en nominelt stabiliserende regulator $K(s)$ giver robust ydeevne, hvis og kun hvis den strukturerede singulærværdi μ for hver frekvens $\omega \in [0, \infty]$, opfylder:

$$\mu_{\Delta}(F_l(N(j\omega), K(j\omega))) < 1 \quad (7.70)$$

Ergo kan det optimale robust ydeevne problem formuleres som:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|\mu_{\Delta}(F_l(N(s), K(s)))\|_{\infty} \quad (7.71)$$

hvor \mathcal{K}_S er mængden af alle nominelt stabiliserende regulatorer.

7.2.1 Komplex μ syntese – D - K iteration

Desværre kan optimeringen (7.71) på denne side ikke evalueres direkte af den simple grund, at vi ikke kan udregne μ eksakt. I stedet kan vi formulere et øvre grænse problem. For rent komplekse perturbationer bliver øvre grænse problemet givet ved:

$$K(s) = \arg \min_{K(j\omega) \in \mathcal{K}_S} \sup_{\omega} \inf_{D(\omega) \in \mathbf{D}} \{ \bar{\sigma}(D(\omega)F_l(N(j\omega), K(j\omega))D^{-1}(\omega)) \} \quad (7.72)$$

Uheldigvis er der endnu ikke fundet en løsning på minimeringsproblemet (7.72) på denne side. Den praktiske tilgangsvinkel til problemet er derfor følgende iterative proces. For en givet regulator $K(s)$ er det at bestemme $D(\omega)$ ved et givet antal frekvens punkter ω netop lig med kompleks μ øvre grænse problemet, som har en kendt løsning. Når vi har fundet disse skaleringer kan vi fitte en stabil overføringsfunktion $D(s)$ til dem således at $D(j\omega)$ tilnærmer $D(\omega)$ for alle frekvenser ω . Vi kan tilmed kræve, at $D(s)$ er minimum-fase (således, at $D^{-1}(s)$ også er stabil) idet faserne af $D(s)$ absorberes i de komplekse perturbationer. Med andre ord: Vi behøves kun at fitte amplituden af $D(j\omega)$.

For givne skaleringsmatricer $D(s)$ er problemet at finde en regulator $K(s)$, der minimerer normen $\|F_l(D(s)N(s)D^{-1}(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_{\infty}}$ et standard \mathcal{H}_{∞} problem, som vi har givet løsningen til i Sætning 6.1 på side 65. Vi kan da finde D -skaleringer givet den nye regulator og starte forfra. Hvis denne iteration (kendt som D - K iteration) konvergerer mod en fast regulator, er denne et godt bud på den μ -optimale regulator. Selvom beregningen af D -skaleringerne og den optimale \mathcal{H}_{∞} regulator begge er konvekse problemer er D - K iteration ikke *samlet konveks* i både $D(s)$ og $K(s)$. Således kan vi ikke garantere konvergens. Imidlertid viser numerisk erfaring, at D - K iteration virker godt i praksis. D - K proceduren kan formuleres som:

Procedure 7.1 (D - K iteration)

1. Givet et udvidet system $N(s)$, lad $i = 1$ og $D_i^*(\omega) = I, \forall \omega$.
2. Fit en stabil minimum-fase overføringsmatrix $D_i(s)$ til de punktvis skaleringer $D_i^*(\omega)$. Udvid $D_i(s)$ med en enhedsmatrix således at $D_i(s)$ passer med $N(s)$. Konstruer systemet $N_{D_i}(s) = D_i(s)N(s)D_i^{-1}(s)$.
3. Find den \mathcal{H}_{∞} optimale regulator $K_i(s)$:

$$K_i(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|F_l(N_{D_i}(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \quad (7.73)$$

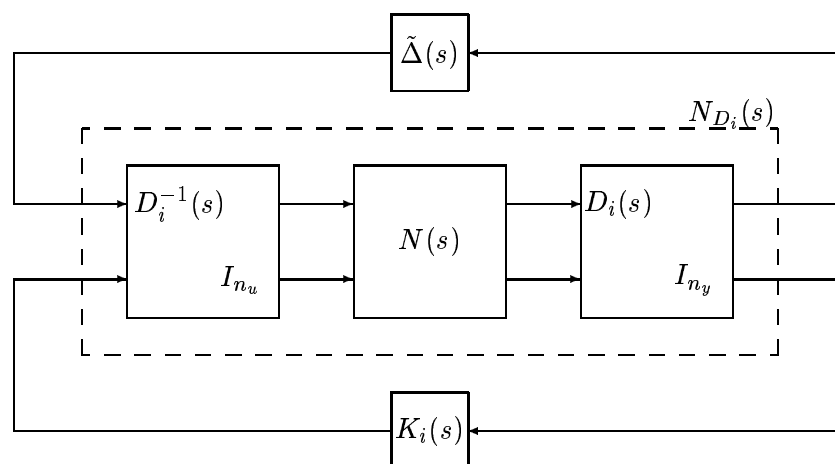
4. Find de nye skaleringer $D_{i+1}^*(\omega)$, der løser det komplekse μ øvre grænse problem:

$$D_{i+1}^*(\omega) = \arg \min_{D(\omega) \in \mathbf{D}} \{ \bar{\sigma} (D(\omega) F_i(N(j\omega), K_i(j\omega)) D^{-1}(\omega)) \} \quad (7.74)$$

for hver frekvens ω .

5. Sammenlign $D_{i+1}^*(\omega)$ og $D_i^*(\omega)$. Stop, hvis de "tæt" på hinanden (*i* størrelse). Ellers lad $i = i + 1$ og gentag iterationen fra punkt 2.

Bemærk, at vi anvender \mathcal{H}_∞ løsningen til at finde regulatoren i step 3. K -steppet i D - K iteration kan illustreres som i Figur 7.5.



Figur 7.5: K -step i D - K iteration. n_u og n_y er, respektivt, antallet af styrbare input og regulerede output (fejlsignaler).

Med MATLAB μ -Analysis and Synthesis Toolbox eksisterer der nu kommercielt tilgængeligt software, som understøtter kompleks μ -syntese ved D - K iteration. Proceduren 7.1 på foregående side kan forholdsvist let implementeres ved hjælp af toolboxen, men i den nuværende udgave af toolboxen (Version 2.0), er gentagne skalære blokke ikke understøttet. Bemærk, at for gentagne skalære blokke er D -skaleringen en fuld matrix, og antallet af SISO overføringsfunktioner, der skal tilpasses stiger derfor kraftigt.

Blandet μ -syntese er langt mere indviklet end det rent komplekse problem, og i den nuværende udgave af μ -toolboxen er det da heller ikke understøttet. Imidlertid er der for nyligt foreslået flere algoritmer til blandet μ -syntese, se f.eks. [You93, TC96], og det siges, at den næste version af μ -toolboxen vil indeholde funktioner til dette.

Litteratur

- [BDG⁺93] G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith. *μ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The MathWorks Inc., Natick, Mass., USA, 2nd edition, July 1993.
- [CS92] R.Y. Chiang and M.G. Safonov. *Robust Control Toolbox*. The MathWorks Inc., Natick, Mass., USA, Aug. 1992.
- [Dai90] R. Lane Dailey. Lecture notes for the workshop on \mathcal{H}_∞ and μ methods for robust control. American Control Conf., San Diego, California, May 1990.
- [DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34(8):831–847, 1989.
- [Doy82] J.C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. In *IEE Proceedings*, volume 129, Part D, No. 6, pages 242–250, November 1982.
- [DP87] J.C. Doyle and A. Packard. Uncertain multivariable systems from a state space perspective. In *Proc. American Control Conf.*, pages 2147–2152, Minneapolis, MN, 1987.
- [DS79] J.C. Doyle and G. Stein. Robustness with observers. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-24(4):607–611, August 1979.
- [DS81] J.C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-26(1):4–16, February 1981.
- [Fra87] B.A. Francis. *A Course in \mathcal{H}_∞ Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [FTD91] M.K.H. Fan, A.L. Tits, and J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36(1):25–38, Jan. 1991.
- [Gri86] M.J. Grimble. Optimal \mathcal{H}_∞ robustness and the relationship to LQG design problems. *Int. J. Control*, 43(2):351–372, 1986.
- [Hol94] A.M. Holohan. A tutorial on mu-analysis. In *EURACO Network: Robust and Adaptive Control Tutorial Workshop*, University of Dublin, Trinity College, 1994. Lecture 2.5.
- [Lun89] J. Lunze. *Robust Multivariable Feedback Control*. Prentice Hall Int., UK, 1989.

- [Mac89] J.M. Maciejowski. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley Series in Electronic Systems Engineering. Addison-Wesley, 1989.
- [MZ89] M. Morari and E. Zafriou. *Robust Process Control*. Prentice-Hall Inc., 1989.
- [PD93] A. Packard and J.C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- [TC96] S. Tøffner-Clausen. *System Identification and Robust Control – A Case Study Approach*. Advances in Industrial Control. Springer Verlag, London, UK, 1996. ISBN 3-540-76087-3.
- [TCB95] S. Tøffner-Clausen and S.G. Breslin. Classical versus modern control design methods for safety critical control engineering practice. Technical Report ACT/CS08/95, Industrial Control Center, University of Strathclyde, 50 George Street, Glasgow G1 1QE, 1995.
- [YJB76a] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part I: The single-input-output case. *IEEE Trans. Aut. Contrl.*, AC-21:3–13, 1976.
- [YJB76b] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part II: The multivariable case. *IEEE Trans. Aut. Contrl.*, AC-21:319–338, 1976.
- [YND91] P.M. Young, M.P. Newlin, and J.C. Doyle. μ analysis with real parametric uncertainty. In *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1251–1256, Brighton, England, Dec. 1991.
- [YND92] P.M. Young, M.P. Newlin, and J.C. Doyle. Practical computation of the mixed μ problem. In *Proc. American Control Conf.*, volume 3, pages 2190–2194, Chicago, Illinois, June 1992.
- [You93] P.M. Young. *Robustness with Parametric and Dynamic Uncertainty*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 1993.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Trans. Aut. Contrl.*, AC-26:585–601, 1981.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Inc., Upper Sadle River, New Jersey 07458, 1996.