

## Kapitel 7

# Robust regulator design med $\mu$

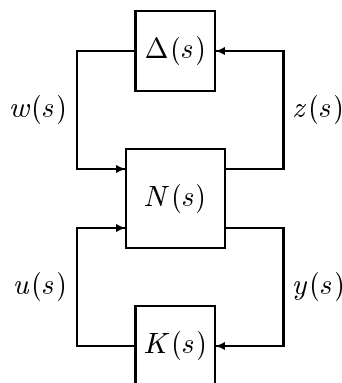
Der er to væsentlige begrænsninger i forbindelse med anvendelsen af  $\mathcal{H}_\infty$  teori til regulator-design. For det første kan vi kun analysere fuldt komplekse perturbationer  $\Delta(s) \in \mathbf{C}^{n \times m}$  ikke-konservativt i en  $\mathcal{H}_\infty$  robust stabilitetstest. For det andet kan robust ydeevne problemet kun håndteres konservativt *selv for fuldt komplekse perturbationer* fordi stabilitet og ydeevne ikke kan separeres i  $\mathcal{H}_\infty$  strukturen. Konservatismen afhænger af usikkerhedsstrukturen samt af systemets konditionstal  $\kappa$ . I dette kapitel vil vi vise at disse begrænsninger kan undgås, hvis vi benytter *den strukturerede singularværdi*  $\mu$ .

Vi vil først betragte analyseproblemet, dvs. hvordan man, givet en regulator  $K(s)$ , checker for robust stabilitet og robust ydeevne ved hjælp af  $\mu$ . Derefter vil synteseproblemet blive behandlet, dvs. hvordan finder vi en regulator, der er optimal med hensyn til  $\mu$ .

### 7.1 $\mu$ analyse

#### 7.1.1 Robust stabilitet

Vi vil betragte reguleringsproblemer, der kan repræsenteres i blok diagram strukturen vist i Figur 7.1. Denne struktur vil vi benævne  *$N\Delta K$ -strukturen*.



Figur 7.1:  $N\Delta K$  formulering af robust stabilitetsproblem.

Ligheden mellem  $N\Delta K$  og  $2 \times 2$  blok strukturen er indlysende. Nu vil vi imidlertid ikke begrænse  $\Delta(s)$  til at være en fuld kompleks blok. I stedet antages det at  $\Delta(s)$  har en bestemt *blok-diagonal* struktur. Antag nemlig, at  $\Delta(s)$  tilhører den begrænsede delmængde:

$$\mathbf{B}\Delta = \{\Delta(s) \in \Delta \mid \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1\} \quad (7.1)$$

hvor  $\Delta$  er defineret som:

$$\Delta = \left\{ \text{diag} \left( \delta_1^r I_{r_1}, \dots, \delta_{m_r}^r I_{r_{m_r}}, \delta_1^c I_{r_{m_r+1}}, \dots, \delta_{m_c}^c I_{r_{m_r+m_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{m_C} \right) \mid \delta_i^r \in \mathbf{R}, \delta_i^c \in \mathbf{C}, \Delta_i \in \mathbf{C}^{r_{m_r+m_c+i} \times r_{m_r+m_c+i}} \right\} \quad (7.2)$$

Vi betragter således reelle og komplekse perturbationer, som påvirker det nominelle system gennem  $N\Delta K$  strukturen. Meget generelle robust stabilitetsproblemer kan formuleres gennem denne struktur, bl.a. parametrisk usikkerhed, se Eksempel 7.1. Det er klart, at blok-diagonal strukturen på  $\Delta(s)$  tillader os at anvende meget mere detaljerede usikkerhedsmodeller, end hvis  $\Delta(s)$  simpelthen er én fuld kompleks blok. Bemærk, at en fuld kompleks blok selvfølgelig blot er et specialtilfælde af mængden  $\Delta$ .

### Eksempel 7.1 (Diagonal perturbationsformulering I)

*Dette eksempel er en let modificeret udgave af et eksempel givet i [Hol94]. Antag, at systemet  $G(s)$  er givet ved:*

$$G(s) = \frac{\alpha}{\beta s + 1} \quad (7.3)$$

hvor DC forstærkningen  $\alpha$  og tidskonstanten  $\beta$  kun kendes med 10% usikkerhed:

$$\alpha = [27.0, 33.0], \quad \beta = [0.9, 1.1] \quad (7.4)$$

Vi vil udtrykke  $\alpha$  og  $\beta$  ved deres nominelle værdi samt to perturbationer  $\Delta_\alpha$  og  $\Delta_\beta$  for hvilke  $|\Delta_{\alpha,\beta}| \leq 1$ . Dette kan f.eks. opnås med:

$$\alpha = 30 \left( 1 + \frac{1}{10} \Delta_\alpha \right) \quad (7.5)$$

$$\beta = 1.0 \left( 1 + \frac{1}{10} \Delta_\beta \right) \quad (7.6)$$

hvor

$$\Delta_\alpha \in [-1, +1], \quad \Delta_\beta \in [-1, +1] \quad (7.7)$$

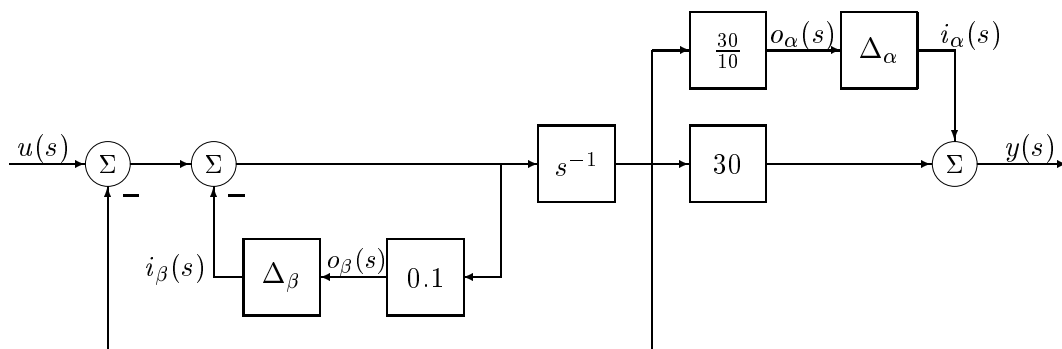
Lad  $\mathbf{B}\Delta$  betegne mængden  $[-1, +1]$ . Så kan overføringsfunktionen  $G(s)$  skrives:

$$G(s) = \frac{30(1 + 0.1\Delta_\alpha)}{(1 + 0.1\Delta_\beta)s + 1} \quad (7.8)$$

med

$$\Delta_\alpha, \Delta_\beta \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.9)$$

På blok-diagram form kan  $G(s)$  repræsenteres som i Figur 7.2 på næste side.



Figur 7.2: Eksempel 7.1: Blok-diagram repræsentation af  $G(s)$ .

For at bestemme  $N\Delta K$  formuleringen fjernes  $\Delta$  blokkene i Figure 7.2 og overføringsfunktionerne fra de tre input  $i_\alpha(s)$ ,  $i_\beta(s)$  og  $u(s)$  til de tre output  $o_\alpha(s)$ ,  $o_\beta(s)$  og  $y(s)$  bestemmes. Standard blok-diagram manipulation giver på matrix form:

$$\begin{bmatrix} o_\alpha(s) \\ o_\beta(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{30}{10(s+1)} & \frac{30}{10(s+1)} \\ 0 & -\frac{s}{10(s+1)} & \frac{s}{10(s+1)} \\ 1 & -\frac{30}{s+1} & \frac{30}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(s) \\ i_\beta(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Usikkerhedsblokkene er givet ved:

$$\begin{bmatrix} i_\alpha(s) \\ i_\beta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha o_\alpha(s) \\ \Delta_\beta o_\beta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha & 0 \\ 0 & \Delta_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o_\alpha(s) \\ o_\beta(s) \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Lad herefter  $w(s)$ ,  $z(s)$ ,  $N(s)$  og  $\Delta(s)$  være givet ved:

$$w(s) = \begin{bmatrix} i_\alpha(s) \\ i_\beta(s) \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$z(s) = \begin{bmatrix} o_\alpha(s) \\ o_\beta(s) \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{30}{10(s+1)} & \frac{30}{10(s+1)} \\ 0 & -\frac{s}{10(s+1)} & \frac{s}{10(s+1)} \\ 1 & -\frac{30}{s+1} & \frac{30}{s+1} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

$$\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_\alpha, \Delta_\beta\} = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha & 0 \\ 0 & \Delta_\beta \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

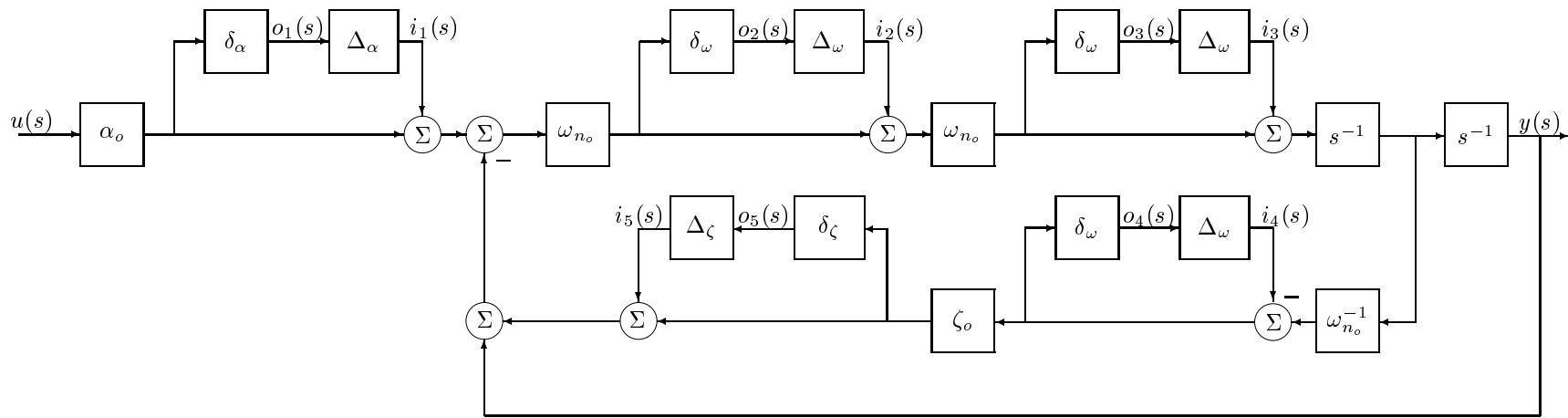
Det perturberede system er nu beskrevet ved:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$w(s) = \Delta(s)z(s) \quad (7.17)$$

og kan umiddelbart puttes ind i  $N\Delta K$  strukturen.





Figur 7.3: *Perturberet anden ordens system på overføringsfunktionform.*

Så er det perturberede 2. ordens system givet ved:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = N(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

$$w(s) = \Delta(s)z(s) \quad (7.29)$$

og kan umiddelbart puttes ind i  $N\Delta K$  strukturen. Bemærk, at i dette tilfælde indeholder blokstrukturen for  $\Delta(s)$  gentagne skalære blokke:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Generelt kan der for et vilkårligt usikkert system opstilles adskillige ækvivalente  $N\Delta K$  formuleringer, der kan indeholde forskellige  $\Delta(s)$  strukturer. Det kan være vanskeligt at bestemme en **minimal** formulering, hvor størrelsen af  $\Delta(s)$  er mindst mulig.

Som illustreret gennem de to ovenstående eksempler kan meget strukturerede usikkerhedsmodeller repræsenteres i  $N\Delta K$  strukturen. Desværre kan ekstraktionen af usikkerhedsblokkene involvere en del kedsommelig algebra. Heldigvis findes der, i MATLAB  $\mu$ -Toolboxen, en meget handy `m`-funktion (`sysic.m`), der kan automatisere denne proces.

Dynamisk usikkerhed kan også inkluderes gennem komplekse blokke af passende størrelse.

Lad nu  $F_l(N(s), K(s)) = P(s)$  betegne overføringsfunktionen opnået ved at lukke den nederste sløjfe i Figur 7.1 på side 75.  $P(s)$  er den *generaliserede lukket-sløjfe overføringsfunktion* og er givet ved:

$$P(s) = F_l(N(s), K(s)) \quad (7.31)$$

$$= N_{11}(s) + N_{12}(s)K(s)(I - N_{22}(s)K(s))^{-1}N_{21}(s) \quad (7.32)$$

Robust stabilitet givet en struktureret usikkerhed  $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$  er da bestemt ved den følgende sætning, som er en generalisering af  $\mathcal{H}_\infty$  robust stabilitetsætningen (se Sætning 5.2 på side 51).

**Sætning 7.1** *Antag, at systemet  $P(s)$  er stabilt, samt at perturbationen  $\Delta(s)$  er af en sådan form, at den perturberede lukket-sløjfe er stabil hvis og kun hvis Nyquist kurven for  $\det(I - P(s)\Delta(s))$  ikke omslutter origo. Så er lukket-sløjfen i Figur 7.1 på side 75 stabil for samtlige perturbationer  $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$  hvis og kun hvis*

$$\det(I - P(j\omega)\Delta(j\omega)) \neq 0 \quad \forall \omega, \forall \Delta(j\omega) \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.33)$$

$$\Leftrightarrow \rho(P(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega, \forall \Delta(j\omega) \in \mathbf{B}\Delta \quad (7.34)$$

$$\Leftarrow \bar{\sigma}(P(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \quad (7.35)$$

**Bevis for Sætning 7.1** Beviset følger umiddelbart af  $\mathcal{H}_\infty$  robust stabilitetsætningen, Sætning 5.2 på side 51 med  $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$ .  $\square$

Bemærk, at (7.35) kun er en tilstrækkelig betingelse for robust stabilitet. Nødvendigheden af den tilsvarende betingelse for ustrukturerede usikkerheder følger af det faktum, at den ustrukturerede mængde indeholder *alle*  $\Delta(s)$  med  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$ . Nu begrænser vi imidlertid perturbationsmængden til  $\Delta(s) \in \mathbf{B}\Delta$  og derfor er betingelsen (7.35) generelt arbitrært

konservativ. I stedet for en singularværdi robust stabilitetsbetingelse har vi brug for noget, der taget hensyn til strukturen af perturbationen  $\Delta(s)$ . Dette er præcist den strukturerede singularværdi  $\mu$ .

Givet en matrix  $P \in \mathbf{C}^{n \times m}$  er den positive reelle funktion  $\mu$  defineret ved:

$$\mu_{\Delta}(P) \triangleq \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \det(I - P\Delta) = 0\}} \quad (7.36)$$

undtagen hvis ingen  $\Delta \in \mathbf{\Delta}$  gør  $I - P\Delta$  singular ( $\det(I - P\Delta) = 0$ ); i dette tilfælde er  $\mu_{\Delta}(P) = 0$ . Ergo er  $1/\mu_{\Delta}(P)$  "størrelsen" af den mindste perturbation  $\Delta$ , målt ved dens største singularværdi  $\bar{\sigma}(\Delta)$ , som gør  $I - P\Delta$  singular. Hvis  $P(s)$  er en overføringsmatrix kan vi fortolke  $1/\mu_{\Delta}(P(j\omega))$  som størrelsen af den mindste perturbation, der flytter de karakteristiske loci for  $P(s)$  over i Nyquist punktet  $(-1, 0)$  ved frekvensen  $\omega$ .

Fra definitionen af  $\mu$  samt Sætning 7.1 på foregående side kan vi nu opstille følgende sætning for bestemmelse af robust stabilitet, se også [DP87, PD93]:

**Sætning 7.2 (Robust stabilitet med  $\mu$ )** *Antag, at systemet  $P(s)$  er stabilt, samt at perturbationen  $\Delta(s)$  er af en sådan form, at den perturberede lukket-sløjfe er stabil hvis og kun hvis Nyquist kurven for  $\det(I - P(s)\Delta(s))$  ikke omslutter origo. Så er lukket-sløjfen i Figur 7.1 på side 75 stabil for samtlige perturbationer  $\Delta(s) \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta}$  hvis og kun hvis*

$$\|\mu_{\Delta}(P(s))\|_{\infty} \leq 1 \quad (7.37)$$

hvor:

$$\|\mu_{\Delta}(P(s))\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega} \mu_{\Delta}(P(j\omega)) \quad (7.38)$$

### 7.1.2 Robust ydeevne

For at kunne analysere for robust ydeevne inkluderer vi de normaliserede eksterne forstyrrelser  $d'(s)$  samt de normaliserede fejlsignaler  $e'(s)$  i  $N\Delta K$  formuleringen. Vi kan da opstille et generelt værktøj til analyse og design af lineære systemer, se Figur 7.4 på næste side. Enhver lineær kombination af kontrol input  $u$ , målte output  $y$ , forstyrrelser  $d'$ , fejlsignaler  $e'$ , perturbationer  $w$  samt regulator  $K$  kan beskrives ved hjælp af dette "generiske" system.

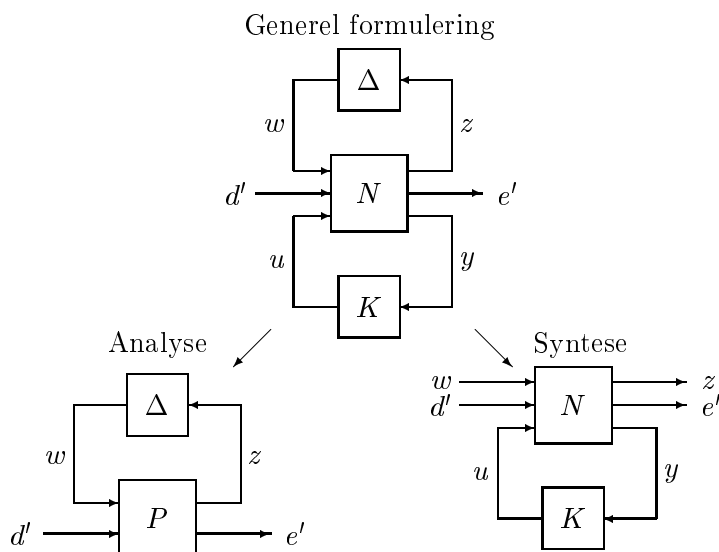
Inden for dette system kan analyse og design ses som 2 specialtilfælde, se Figur 7.4 på den følgende side. Som ved  $2 \times 2$  blok problemet er skaleringer og vægtfunktioner absorberet i overføringsfunktionen  $N(s)$ , således at  $d'(s)$ ,  $e'(s)$  og  $\Delta(s)$  er normaliseret til norm 1. Bemærk, at hvis vi opdeler  $P(s)$  i 4 blokke, der er konsistente med dimensionen af de 2 input  $w$  og  $d'$  samt de 2 output  $z$  og  $e'$  kan vi identificere  $P_{11}(s)$  som overføringsmatricen  $P(s)$  i Sætning 7.2.

I forbindelse med analyse af robust ydeevne er vi interesseret i overføringsfunktionen fra  $d'(s)$  til  $e'(s)$ . Denne overføringsfunktion er givet ved:

$$e'(s) = F_u(P(s), \Delta(s))d'(s) \quad (7.39)$$

$$= \left[ P_{22}(s) + P_{21}(s)\Delta(s) (I - P_{11}(s)\Delta(s))^{-1} P_{12}(s) \right] d'(s) \quad (7.40)$$

I (7.40) er  $P_{22}(s)$  den vægtede nominelle ydeevne funktion (typisk output sensitiviteten), hvorfor  $F_u(P(s), \Delta(s))$  således er den vægtede perturberede ydeevne funktion. Vores robuste



Figur 7.4: Et generelt værktøj for analyse samt regulatordesign for lineære systemer.

ydeevnemål kan nu formuleres fra Ligning (7.40) på forrige side som:

$$\|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(F_u(P(j\omega), \Delta(j\omega))) < 1 \quad \forall \Delta(j\omega) \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta} \quad (7.41)$$

Bemærk, at vores betingelse for robust ydeevne er udtrykt som en singularværdi begrænsning, ligedan med en robust stabilitetsbetingelse for ustruktureret usikkerhed. Vi kan derfor konkludere, at *den robuste ydeevne-betingelse (7.41) er opfyldt, hvis og kun hvis systemet  $F_u(P(s), \Delta(s))$  er robust stabilt overfor en normbegrænset perturbation  $\Delta_p(s)$  med  $\bar{\sigma}(\Delta_p(j\omega)) \leq 1, \forall \omega$ . Ergo, ved at udvide perturbationsstrukturen med en fuld kompleks “ydeevne-blok”  $\Delta_p(s)$  kan vi checke for robust ydeevne gennem en ustruktureret robust stabilitetsbetingelse. Endvidere kan denne udvidelse af perturbationsstrukturen foretages helt naturligt med  $\mu$ , fordi den tilladte struktur netop er blok-diagonal.*

Vi har nu den følgende sætning til vurdering af robust ydeevne, se også [DP87, PD93]:

**Sætning 7.3 (Robust ydeevne med  $\mu$ )** *Lad ydeevnekrav være givet gennem en  $\mathcal{H}_\infty$  specifikation på overføringsmatricen fra  $d'(s)$  til  $e'(s)$  – typisk en vægtet sensitivitets-specifikation – af formen:*

$$\|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(F_u(P(j\omega), \Delta(j\omega))) < 1 \quad (7.42)$$

*Så er den perturberede lukketsøjfe  $F_u(P(s), \Delta(s))$  stabil og opfylder ydeevne-specifikationen  $\|F_u(P(s), \Delta(s))\|_{\mathcal{H}_\infty} < 1, \forall \Delta(s) \in \mathbf{B}\mathbf{\Delta}$  hvis og kun hvis:*

$$\|\mu_{\tilde{\Delta}}(P(s))\|_{\infty} \leq 1 \quad (7.43)$$

*hvor perturbationsstrukturen er udvidet med en fuld kompleks ydeevne-blok:*

$$\tilde{\Delta} = \left\{ \text{diag}(\Delta, \Delta_p) \mid \Delta \in \mathbf{\Delta}, \Delta_p \in \mathbf{C}^{k \times k} \right\} \quad (7.44)$$

Sætning 7.3 er en af grundene til, at det er populært at måle ydeevne ved hjælp af  $\mathcal{H}_\infty$ -normen. Hvis usikkerheden begrænses ved den største singularværdi, er det nemlig muligt, gennem  $\mu$ , at checke for robust stabilitet og *robust ydeevne* på en ikke-konservativ måde. Hvis modelusikkerheden er modelleret præcist, dvs. hvis alle systemer  $G_\Delta(s) \in \mathcal{G}$  kan optræde i praksis, så er  $\mu$  betingelsen for robust ydeevne både nødvendig og tilstrækkelig. Altså giver  $\mu$  sætningerne mindre konservative betingelser for robust ydeevne sammenlignet med de tilsvarende  $\mathcal{H}_\infty$  betingelser. Stabilitet og ydeevne kan separeres, langt mere detaljerede usikkerhedsbeskrivelser kan formuleres på grund af den diagonale struktur på  $\Delta$  og vi opnår ikke-konservative betingelser for robust ydeevne selv for dårligt konditionerede systemer ( $\kappa(G(j\omega)) \gg 1$ ).

Ligning (7.43) på foregående side giver en simpel test for robust ydeevne. Hvis vi plotter  $\mu_{\tilde{\Delta}}(P(j\omega))$  mod frekvens er det nemt at checke hvorvidt betingelsen (7.43) i Sætning 7.3 på forrige side er opfyldt.

Idet  $\Delta_1 = \text{diag}\{\Delta, 0\}$  og  $\Delta_2 = \text{diag}\{0, \Delta_p\}$  er specialtilfælde af den generelle struktur  $\Delta \in \tilde{\Delta}$  er det klart at:

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(P(j\omega)) \geq \max\{\mu_{\Delta_1}(P_{11}(j\omega)), \mu_{\Delta_2}(P_{22}(j\omega)) = \bar{\sigma}(P_{22}(j\omega))\} \quad (7.45)$$

hvilket betyder, at en nødvendig betingelse for robust ydeevne er, at lukket-sløjfen er robust stabil samt, at det nominelle system opfylder ydeevne kravene.

### 7.1.3 Beregning af $\mu$

Som illustreret overfor er  $\mu$  et meget nyttigt værktøj til bestemmelse af robust stabilitet og ydeevne i forbindelse med både struktureret og ustruktureret usikkerhed. Desværre er selve udregningen af  $\mu$  et meget kompliceret problem, som der ikke findes nogen generel matematisk løsning på. Problemet er, at Ligning (7.36) på side 81 ikke direkte kan bruges til udregning af  $\mu$ , fordi optimeringsproblemet generelt har flere lokale maksima [DP87, FTD91]. Imidlertid kan vi udlede øvre og nedre grænser for  $\mu$  både for rent komplekse perturbationsmængder ( $m_r = 0$  i Ligning (7.2) på side 76) samt for blandede reelle og komplekse perturbationsmængder. Algoritmer til beregning af disse grænser var genstand for intens forskning i begyndelsen af 1990'erne, se bl.a. [DP87, YND91]. I det følgende vil vi kort redegøre for nogle af disse grænser. For ikke at gøre notationen mere indviklet end højst nødvendigt vil vi antage, at det generaliserede system  $P(s)$  er kvadratisk,  $P(s) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ .

#### 7.1.3.1 $\mu$ med komplekse perturbationer

Lad os først betragte beregning af  $\mu$ , når perturbationsstrukturen udelukkende består af komplekse blokke, dvs.  $m_r = 0$  i (7.2) på side 76. Det kan da rimeligt nemt vises, at  $\mu_{\Delta}(P)$  er givet ved standardfunktioner, når  $\Delta$  er et af de følgende 2 mængder, se f.eks. [ZDG96]:

- Hvis  $\Delta = \{\delta^c I_n \mid \delta^c \in \mathbf{C}\}$  ( $m_r = 0, m_c = 1, m_C = 0$  i (7.2)), så er  $\mu_{\Delta}(P) = \rho(P)$ , spektral radius af  $P$  (den numerisk største egenværdi af  $P$ ,  $\rho(P) = \max_i |\lambda_i(P)|$ ).
- Hvis  $\Delta = \{\Delta \mid \Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}\}$  ( $m_r = 0, m_c = 0, m_C = 1$  i (7.2)), så er  $\mu_{\Delta}(P) = \bar{\sigma}(P)$ , den største singularværdi.

For en generel kompleks perturbation  $\Delta$  gælder at

$$\{\delta^c I_n \mid \delta^c \in \mathbf{C}\} \subset \Delta \subset \{\Delta \mid \Delta \in \mathbf{C}^{n \times n}\} \quad (7.46)$$

Derfor gælder det, at:

$$\rho(P) \leq \mu_{\Delta}(P) \leq \bar{\sigma}(P) \quad (7.47)$$

Imidlertid er disse grænser utilstrækkelige, idet forskellen imellem  $\rho(P)$  og  $\bar{\sigma}(P)$  kan være vilkårlig stor. Ergo må grænserne i Ligning (7.47) forfines. Dette kan gøres gennem transformationer af  $P$  som *ikke påvirker*  $\mu_{\Delta}(P)$  men derimod modificerer  $\rho(P)$  og  $\bar{\sigma}(P)$ . Definér følgende delmængder af  $\mathbf{C}^{n \times n}$ :

$$\mathbf{Q} = \left\{ Q \in \Delta \mid m_r = 0, \delta_i^{c*} \delta_i^c = 1, \Delta_i^* \Delta_i = I_{r_{m_c+i}} \right\} \quad (7.48)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \text{diag} \left( D_1, \dots, D_{m_c}, d_1 I_{r_{m_c+1}}, \dots, d_{m_C} I_{r_{m_c+m_C}} \right) \mid D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i^* = D_i > 0, d_i \in \mathbf{R}, d_i > 0 \right\} \quad (7.49)$$

Det kan nu vises, se f.eks. det originale paper om  $\mu$  af Doyle [Doy82], at for enhver  $\Delta \in \Delta$  (for hvilken  $m_r = 0$ ),  $Q \in \mathbf{Q}$  og  $D \in \mathbf{D}$  gælder der, at:

$$Q^* \in \mathbf{Q}, \quad Q\Delta \in \Delta, \quad \Delta Q \in \Delta, \quad \bar{\sigma}(Q\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta Q) = \bar{\sigma}(\Delta), \quad (7.50)$$

$$D\Delta = \Delta D \quad (7.51)$$

Fra (7.50) og (7.51) kan den følgende sætning udledes.

**Sætning 7.4 (Øvre og nedre grænser for  $\mu$ )** For alle  $Q \in \mathbf{Q}$  og  $D \in \mathbf{D}$  gælder

$$\mu_{\Delta}(PQ) = \mu_{\Delta}(QP) = \mu_{\Delta}(P) = \mu_{\Delta}(DPD^{-1}) \quad (7.52)$$

Ergo kan grænserne i Ligning (7.47) forbedres til:

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP) \leq \mu_{\Delta}(P) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1}) \quad (7.53)$$

Den nedre grænse  $\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP)$  er i virkeligheden en identitet ( $\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP) = \mu_{\Delta}(P)$ ), men desværre er funktionen  $\rho(QP)$  ikke konveks, men har generelt adskillige lokale maksima. Således kan en numerisk søgealgoritme ikke garantere at finde  $\mu$ , men kun give en nedre grænse. På den anden side er udregningen af den øvre grænse et konvekst problem, hvorfor det globale minimum  $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1})$  i princippet altid kan bestemmes. Desværre er den øvre grænse *ikke* altid lig med  $\mu$ . Det kan vises, at for specielt simple perturbationsstrukturer, nemlig for  $m_r = 0$  og  $2m_c + m_C \leq 3$ , er den øvre grænse altid lig med  $\mu$ . For strukturer med  $2m_c + m_C > 3$  vil der imidlertid for de fleste matricer  $P$ , gælde at  $\mu$  er mindre end  $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DPD^{-1})$ . Numerisk erfaring med den øvre grænse indikerer på den anden side, at selv for  $2m_c + m_C > 3$  er den øvre grænse normalt ikke specielt konservativ.

Med MATLAB  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolboxen* [BDG<sup>+</sup>93] eksisterer der idag kommercielt tilgængeligt software, der kan beregne grænserne i Sætning 7.4. I forbindelse med praktisk regulator design (i det mindste for rent komplekse perturbationer) synes de matematiske problemer forbundet med udregningen af  $\mu$  derfor at være forholdsvis teoretiske.

### 7.1.3.2 $\mu$ med blandede perturbationer

Løsningen af det blandede<sup>1</sup>  $\mu$  problem har været genstand for intensiv forskning gennem de sidste 10 år, se f.eks. [FTD91, YND91, YND92, You93]. Vi vil ikke behandle beregningen af grænserne for blandet  $\mu$  i detaljer i denne note (en reference er [You93]), men blot give nogle af de vigtigste resultater. Lad os definere følgende mængder:

$$\mathbf{Q} = \left\{ Q \in \mathbf{\Delta} \mid \delta_i^r \in [-1; 1], \delta_i^c \delta_i^c = 1, \Delta_i^* \Delta_i = I_{r_{m_r+m_c+i}} \right\} \quad (7.54)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \text{diag} (D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{r_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{r_m}) \mid D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, D_i^* = D_i > 0, d_i \in \mathbf{R}, d_i > 0 \right\} \quad (7.55)$$

$$\mathbf{G} = \left\{ \text{diag} (G_1, \dots, G_{m_r}, O_{r_{m_r+1}}, \dots, O_{r_m}) \mid G_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, G_i = G_i^* \right\} \quad (7.56)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \left\{ \text{diag} (D_1, \dots, D_{m_r+m_c}, d_1 I_{r_{m_r+m_c+1}}, \dots, d_{m_c} I_{r_m}) \mid D_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i}, \det(D_i) \neq 0, d_i \in \mathbf{C}, d_i \neq 0 \right\} \quad (7.57)$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \left\{ \text{diag} (g_1, \dots, g_{n_r}, O_{n_c}) \mid g_i \in \mathbf{R} \right\} \quad (7.58)$$

hvor  $r_m = r_{m_r+m_c+m_c}$ ,  $n_r = \sum_{i=1}^{m_r} r_i$  og  $n_c = n - n_r$ . Bemærk, at for overensstemmelse med  $P(s)$  må vi have, at  $\sum_{i=1}^m r_i = n$ .

Vi har da følgende øvre og nedre grænser for blandet  $\mu$ :

**Sætning 7.5 (Øvre og nedre grænser for blandet  $\mu$  [FTD91])** *Lad  $\bar{\lambda}_R$  være den største reelle egen værdi og lad  $\rho_R(P)$  være den reelle spektral radius af  $P$ :*

$$\rho_R(P) \triangleq \max \{ |\lambda_R(P)| : \lambda_R(P) \text{ er en reel egen værdi af } P \} \quad (7.59)$$

*Hvis  $P$  ikke har nogen reelle egen værdier er  $\rho_R(P) = 0$ . Antag endvidere, at  $\alpha_*$  er resultatet af minimeringsproblemet:*

$$\alpha_* = \inf_{D \in \mathbf{D}, G \in \mathbf{G}} \min_{\alpha \in \mathbf{R}} \{ \alpha \mid \bar{\lambda}_R (P^* D P + j (G P - P^* G) - \alpha D) \leq 0 \} \quad (7.60)$$

*Så er:*

$$\rho_R(P) \leq \mu_{\mathbf{\Delta}}(P) \leq \sqrt{\max(0, \alpha_*)} \quad (7.61)$$

Bemærk, at beregningen af den øvre grænse (7.60) involverer en Lineær Matrix Ulighed (LMI). Der eksisterer forskellige numeriske metoder til at tackle sådanne minimeringer. Imidlertid kræver dette, selv for forholdsvis begrænsede problemer ( $n \leq 100$ ), optimering over skaleringer  $D$  og  $G$ , som kan indeholde adskillige tusinde parametre. Behandlingen af sådanne problemer med fornuftige udregningstider kræver derfor, at selve strukturen af det blandede  $\mu$  problem udnyttes i højere grad, se f.eks. [YND92]. Forskellige reformuleringer af øvre grænse problemet er givet i Sætning 7.6 på næste side.

<sup>1</sup>Vi vil ofte referere til det blandede reelle og komplekse  $\mu$  problem simpelthen som det blandede  $\mu$  problem.

**Sætning 7.6 (Reformulering af blandet  $\mu$  øvre grænse)** *Antag, at vi har en matrix  $P \in \mathbf{C}^{n \times n}$  samt en reel positiv skalar  $\beta > 0$ . Lad endvidere for ethvert  $D \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $P_D = DPD^{-1}$ . Så er følgende ækvivalent:*

1. Der eksisterer matrixer  $D_1 \in \mathbf{D}$  og  $G_1 \in \mathbf{G}$  således, at:

$$\bar{\lambda}_R (P^* D_1 P + j(G_1 P - P^* G_1) - \beta^2 D_1) \leq 0 \quad (7.62)$$

2. Der eksisterer matrixer  $D_2 \in \mathbf{D}$  og  $G_2 \in \mathbf{G}$  (eller  $D_2 \in \hat{\mathbf{D}}$  og  $G_2 \in \hat{\mathbf{G}}$ ) således, at:

$$\bar{\lambda}_R (P_{D_2}^* P_{D_2} + j(G_2 P_{D_2} - P_{D_2}^* G_2)) \leq \beta^2 \quad (7.63)$$

3. Der eksisterer matrixer  $D_3 \in \mathbf{D}$  og  $G_3 \in \mathbf{G}$  (eller  $D_3 \in \hat{\mathbf{D}}$  og  $G_3 \in \hat{\mathbf{G}}$ ) således, at:

$$\bar{\sigma} \left[ \left( \frac{P_{D_3}}{\beta} - jG_3 \right) (I + G_3^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \leq 1 \quad (7.64)$$

4. Der eksisterer matrixer  $D_4 \in \mathbf{D}$  og  $G_4 \in \mathbf{G}$  (eller  $D_4 \in \hat{\mathbf{D}}$  og  $G_4 \in \hat{\mathbf{G}}$ ) således, at:

$$\bar{\sigma} \left[ (I + G_4^2)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{P_{D_4}}{\beta} - jG_4 \right) (I + G_4^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \leq 1 \quad (7.65)$$

Bevis for Sætning 7.6 kan findes i [You93]. Ved at anvende Sætning 7.6 kan vi nemt finde alternative formuleringer for den blandede  $\mu$  øvre grænse. For eksempel er den øvre grænse, der er implementeret i MATLAB  $\mu$  toolboxen udledt af Ligning (7.65). Definér  $\beta^*$  som:

$$\beta^* = \inf_{\beta \in \mathbf{R}_+, G \in \hat{\mathbf{G}}, D \in \hat{\mathbf{D}}} \{ \beta \mid \bar{\sigma}(P_{DG}) \leq 1 \} \quad (7.66)$$

hvor  $P_{DG}$  er givet som:

$$P_{DG} = (I + G^2)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{DPD^{-1}}{\beta} - jG \right) (I + G^2)^{-\frac{1}{4}} \quad (7.67)$$

Så er

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QP) \leq \mu_{\Delta}(P) \leq \beta^* \quad (7.68)$$

## 7.2 $\mu$ syntese

I forbindelse med regulator design kan overføringsfunktionen  $F_l(N, K)$  fra  $[w, d']^T$  to  $[z, e']^T$  opdeles som:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ e'(s) \end{bmatrix} = F_l(N(s), K(s)) \begin{bmatrix} w(s) \\ d'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(s) + N_{12}(s)K(s) & (I - N_{22}(s)K(s))^{-1} N_{21}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ d'(s) \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Bemærk, at  $F_l(N(s), K(s)) = P(s)$ . Hvis vi anvender Sætning 7.3 på side 82, ses det, at en nominelt stabiliserende regulator  $K(s)$  giver robust ydeevne, hvis og kun hvis den strukturerede singulærværdi  $\mu$  for hver frekvens  $\omega \in [0, \infty]$ , opfylder:

$$\mu_{\Delta}(F_l(N(j\omega), K(j\omega))) < 1 \quad (7.70)$$

Ergo kan det optimale robust ydeevne problem formuleres som:

$$K(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|\mu_{\Delta}(F_l(N(s), K(s)))\|_{\infty} \quad (7.71)$$

hvor  $\mathcal{K}_S$  er mængden af alle nominelt stabiliserende regulatorer.

### 7.2.1 Kompleks $\mu$ syntese – $D$ - $K$ iteration

Desværre kan optimeringen (7.71) på denne side ikke evalueres direkte af den simple grund, at vi ikke kan udregne  $\mu$  eksakt. I stedet kan vi formulere et øvre grænse problem. For rent komplekse perturbationer bliver øvre grænse problemet givet ved:

$$K(s) = \arg \min_{K(j\omega) \in \mathcal{K}_S} \sup_{\omega} \inf_{D(\omega) \in \mathbf{D}} \{ \bar{\sigma}(D(\omega)F_l(N(j\omega), K(j\omega))D^{-1}(\omega)) \} \quad (7.72)$$

Uheldigvis er der endnu ikke fundet en løsning på minimeringsproblemet (7.72) på denne side. Den praktiske tilgangsvinkel til problemet er derfor følgende iterative proces. For en givet regulator  $K(s)$  er det at bestemme  $D(\omega)$  ved et givet antal frekvens punkter  $\omega$  netop lig med kompleks  $\mu$  øvre grænse problemet, som har en kendt løsning. Når vi har fundet disse skaleringer kan vi fitte en stabil overføringsfunktion  $D(s)$  til dem således at  $D(j\omega)$  tilnærmer  $D(\omega)$  for alle frekvenser  $\omega$ . Vi kan tilmed kræve, at  $D(s)$  er minimum-fase (således, at  $D^{-1}(s)$  også er stabil) idet faserne af  $D(s)$  absorberes i de komplekse perturbationer. Med andre ord: Vi behøves kun at fitte amplituden af  $D(j\omega)$ .

For givne skaleringsmatricer  $D(s)$  er problemet at finde en regulator  $K(s)$ , der minimerer normen  $\|F_l(D(s)N(s)D^{-1}(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_{\infty}}$  et standard  $\mathcal{H}_{\infty}$  problem, som vi har givet løsningen til i Sætning 6.1 på side 65. Vi kan da finde  $D$ -skaleringer givet den nye regulator og starte forfra. Hvis denne iteration (kendt som  $D$ - $K$  iteration) konvergerer mod en fast regulator, er denne et godt bud på den  $\mu$ -optimale regulator. Selvom beregningen af  $D$ -skaleringerne og den optimale  $\mathcal{H}_{\infty}$  regulator begge er konvekse problemer er  $D$ - $K$  iteration ikke *samlet konveks* i både  $D(s)$  og  $K(s)$ . Således kan vi ikke garantere konvergens. Imidlertid viser numerisk erfaring, at  $D$ - $K$  iteration virker godt i praksis.  $D$ - $K$  proceduren kan formuleres som:

#### Procedure 7.1 ( $D$ - $K$ iteration)

1. Givet et udvidet system  $N(s)$ , lad  $i = 1$  og  $D_i^*(\omega) = I, \forall \omega$ .
2. Fit en stabil minimum-fase overføringsmatrix  $D_i(s)$  til de punktvis skaleringer  $D_i^*(\omega)$ . Udvid  $D_i(s)$  med en enhedsmatrix således at  $D_i(s)$  passer med  $N(s)$ . Konstruer systemet  $N_{D_i}(s) = D_i(s)N(s)D_i^{-1}(s)$ .
3. Find den  $\mathcal{H}_{\infty}$  optimale regulator  $K_i(s)$ :

$$K_i(s) = \arg \min_{K(s) \in \mathcal{K}_S} \|F_l(N_{D_i}(s), K(s))\|_{\mathcal{H}_{\infty}} \quad (7.73)$$

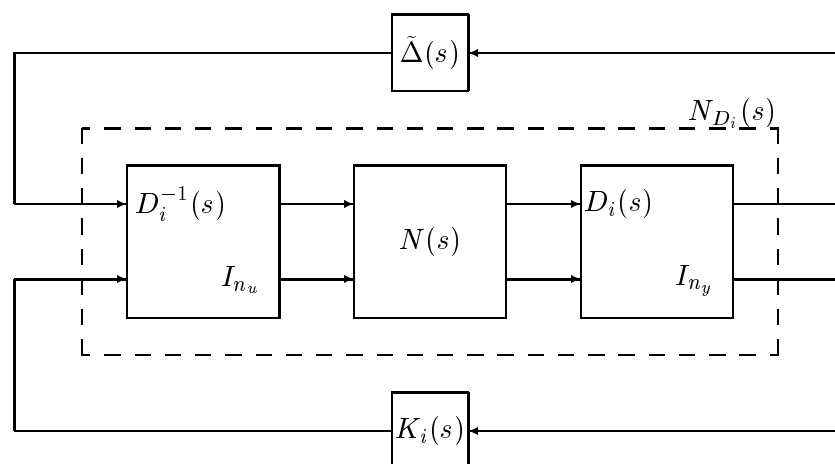
4. Find de nye skaleringer  $D_{i+1}^*(\omega)$ , der løser det komplekse  $\mu$  øvre grænse problem:

$$D_{i+1}^*(\omega) = \arg \min_{D(\omega) \in \mathbf{D}} \{ \bar{\sigma} (D(\omega) F_l(N(j\omega), K_i(j\omega)) D^{-1}(\omega)) \} \quad (7.74)$$

for hver frekvens  $\omega$ .

5. Sammenlign  $D_{i+1}^*(\omega)$  og  $D_i^*(\omega)$ . Stop, hvis de "tæt" på hinanden (*i* størrelse). Ellers lad  $i = i + 1$  og gentag iterationen fra punkt 2.

Bemærk, at vi anvender  $\mathcal{H}_\infty$  løsningen til at finde regulatoren i step 3.  $K$ -steppet i  $D$ - $K$  iteration kan illustreres som i Figur 7.5.



Figur 7.5:  $K$ -step i  $D$ - $K$  iteration.  $n_u$  og  $n_y$  er, respektivt, antallet af styrbare input og regulerede output (fejlsignaler).

Med MATLAB  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox eksisterer der nu kommercielt tilgængeligt software, som understøtter kompleks  $\mu$ -syntese ved  $D$ - $K$  iteration. Proceduren 7.1 på foregående side kan forholdsvist let implementeres ved hjælp af toolboxen, men i den nuværende udgave af toolboxen (Version 2.0), er gentagne skalære blokke ikke understøttet. Bemærk, at for gentagne skalære blokke er  $D$ -skaleringen er fuld matrix, og antallet af SISO overføringsfunktioner, der skal tilpasses stiger derfor kraftigt.

Blandet  $\mu$ -syntese er langt mere indviklet end det rent komplekse problem, og i den nuværende udgave af  $\mu$ -toolboxen er det da heller ikke understøttet. Imidlertid er der for nyligt foreslået flere algoritmer til blandet  $\mu$ -syntese, se f.eks. [You93, TC96], og det siges, at den næste version af  $\mu$ -toolboxen vil indeholde funktioner til dette.

# Litteratur

- [BDG<sup>+</sup>93] G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith.  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox*. The MathWorks Inc., Natick, Mass., USA, 2nd edition, July 1993.
- [CS92] R.Y. Chiang and M.G. Safonov. *Robust Control Toolbox*. The MathWorks Inc., Natick, Mass., USA, Aug. 1992.
- [Dai90] R. Lane Dailey. Lecture notes for the workshop on  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mu$  methods for robust control. American Control Conf., San Diego, California, May 1990.
- [DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis. State space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-34(8):831–847, 1989.
- [Doy82] J.C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. In *IEE Proceedings*, volume 129, Part D, No. 6, pages 242–250, November 1982.
- [DP87] J.C. Doyle and A. Packard. Uncertain multivariable systems from a state space perspective. In *Proc. American Control Conf.*, pages 2147–2152, Minneapolis, MN, 1987.
- [DS79] J.C. Doyle and G. Stein. Robustness with observers. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-24(4):607–611, August 1979.
- [DS81] J.C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-26(1):4–16, February 1981.
- [Fra87] B.A. Francis. *A Course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [FTD91] M.K.H. Fan, A.L. Tits, and J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36(1):25–38, Jan. 1991.
- [Gri86] M.J. Grimble. Optimal  $\mathcal{H}_\infty$  robustness and the relationship to LQG design problems. *Int. J. Control*, 43(2):351–372, 1986.
- [Hol94] A.M. Holohan. A tutorial on mu-analysis. In *EURACO Network: Robust and Adaptive Control Tutorial Workshop*, University of Dublin, Trinity College, 1994. Lecture 2.5.
- [Lun89] J. Lunze. *Robust Multivariable Feedback Control*. Prentice Hall Int., UK, 1989.

- [Mac89] J.M. Maciejowski. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley Series in Electronic Systems Engineering. Addison-Wesley, 1989.
- [MZ89] M. Morari and E. Zafriou. *Robust Process Control*. Prentice-Hall Inc., 1989.
- [PD93] A. Packard and J.C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- [TC96] S. Tøffner-Clausen. *System Identification and Robust Control – A Case Study Approach*. Advances in Industrial Control. Springer Verlag, London, UK, 1996. ISBN 3-540-76087-3.
- [TCB95] S. Tøffner-Clausen and S.G. Breslin. Classical versus modern control design methods for safety critical control engineering practice. Technical Report ACT/CS08/95, Industrial Control Center, University of Strathclyde, 50 George Street, Glasgow G1 1QE, 1995.
- [YJB76a] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part I: The single-input-output case. *IEEE Trans. Aut. Contrl.*, AC-21:3–13, 1976.
- [YJB76b] D.C. Youla, H.A. Jabr, and J.J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers part II: The multivariable case. *IEEE Trans. Aut. Contrl.*, AC-21:319–338, 1976.
- [YND91] P.M. Young, M.P. Newlin, and J.C. Doyle.  $\mu$  analysis with real parametric uncertainty. In *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1251–1256, Brighton, England, Dec. 1991.
- [YND92] P.M. Young, M.P. Newlin, and J.C. Doyle. Practical computation of the mixed  $\mu$  problem. In *Proc. American Control Conf.*, volume 3, pages 2190–2194, Chicago, Illinois, June 1992.
- [You93] P.M. Young. *Robustness with Parametric and Dynamic Uncertainty*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, May 1993.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Trans. Aut. Contrl.*, AC-26:585–601, 1981.
- [ZDG96] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996.